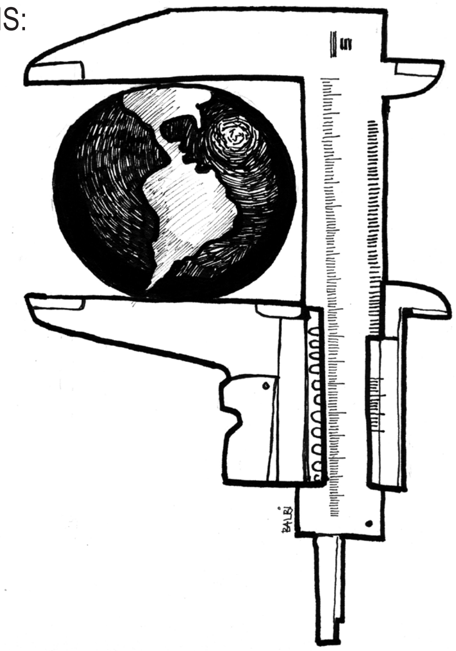
LOS INFINITESIMALES EN EL CÁLCULO:
UN PUNTO DE VISTA SISTÉMICO
THE INFINITESIMALS IN CALCULATIONS: A SYSTEMATIC POINT OF VIEW



CARMEN MARÍA VALDIVÉ FERNÁNDEZ*
valfer16@yahoo.com
Universidad Centrooccidental
"Lisandro Alvarado".
Barquisimeto, edo. Lara.
Venezuela.

Fecha de recepción: 31 de enero de 2007
Fecha de aceptación: 14 de mayo de 2008

Resumen

En este artículo presentamos una propuesta para la enseñanza del Cálculo, que surge del especial interés por estudiar y analizar los diferentes enfoques que se le han dado a su enseñanza en diferentes países. Enfoques que han considerado al infinito matemático, específicamente al infinito "pequeño" llamado "infinitesimal", como su centro. Infinito que deja conflictos cognitivos y pedagógicos que obstaculizan la comprensión de los conceptos claves como límite, continuidad, número real, sucesiones, entre otros. El artículo pretende contribuir con el debate, dejando a los educadores matemáticos universitarios, directrices que les permitan orientar su praxis pedagógica, desde los elementos del triángulo didáctico.

Palabras clave: enseñanza, cálculo, infinito pequeño.

Abstract

In this article we present a proposal for teaching Calculus which emerges from the especial interest on studying and analyzing the different approaches given to its teaching in different countries; approaches that have considered the mathematical infinite, specifically the "small" infinite called "infinitesimal", as its center. An infinite that leaves cognitive and pedagogical conflicts that become obstacles for the comprehension of key concepts such as limit, continuity, real number and successions among others. The article pretends to contribute to the debate, leaving for educators and university mathematicians guidelines that allow them to orientate their pedagogical praxis from the elements of the didactical triangle.

Key words: *teaching, calculus, small infinite.*

EDUCERE • Artículos arbitrados • ISSN: 1316 - 4910 • Año 12, Nº 42 • Julio - Agosto - Septiembre, 2008 • 531 - 538.

L

as dificultades que presentan los estudiantes cuando se inician en los cursos de Análisis, obedecen a muchas y variadas razones, según lo señalan algunos autores. Dificultades que no podrían desligarse de los problemas que tienen los profesores o educadores matemáticos cuando administran esos cursos, ni de la complejidad y naturaleza de los conceptos que se tratan en ellos, específicamente cuando se estudia uno de los conceptos considerado el alma del Cálculo: *el infinitesimal*.

A lo largo de la historia han existido diferentes enfoques para abordarlo y por ende diferentes significados asociados a los conceptos que lo involucran. Tal situación obliga a analizar la problemática desde los tres componentes del triángulo didáctico; *el cognitivo, el epistémico y el pedagógico*, e incorporando el *sociocultural*. En este artículo se hace un análisis de esa problemática, dejando consideraciones teóricas a los docentes universitarios que les permitan decidir su praxis pedagógica.

1. Fundamentación teórica de la propuesta

La enseñanza del Cálculo y del análisis ha pasado por cambios a lo largo de los últimos años. Estos cambios dejan una variedad de enfoques que han considerado los fundamentos de la matemática como principios rectores de la enseñanza de los conceptos claves que necesariamente requieren de los infinitesimales para su abordaje (límite, continuidad, entre otros). Diversos autores han analizado este componente pedagógico, algunos a nivel global como Tall (1981, 1992) y otros a nivel local como Artigue (2000) y Cantoral y Farfán (2000). Sin querer jerarquizar ni fragmentar los componentes del triángulo didáctico mencionados en la introducción, comenzaré por el *pedagógico*.

Los enfoques en la enseñanza del Cálculo: lo pedagógico

Para Tall (1992), el Cálculo tiene una variedad de significados en diferentes países, en los que se ha trabajado con dos enfoques diferentes: *el enfoque infinitesimal* (basado en el análisis no estándar) y el de *Cálculos con o sin programación* (tales enfoques fueron detallados por Tall en 1981). Por tanto, los enfoques según Tall, van desde un *Cálculo informal* que gira alrededor de las ideas informales de razón de cambio y de los roles de la diferenciación e integración como procesos inversos, Cálculo de áreas, volúmenes y aplicaciones de las integrales, hasta un *Cálculo formal* que gira alrededor de la idea de completitud de la definición ε - δ de límite (Weierstrass), de continuidad, diferenciación, integrales de Riemann y deducciones formales de teoremas tales como el teorema del Valor Medio y el teorema Fundamental del Cálculo.

Estos diferentes significados, según Tall, son los que han generado las dificultades que se reseñaron en los párrafos precedentes. Sin embargo considera el enfoque dinámico de límite, como el más adecuado para que el estudiante se inicie en el Cálculo.

Tall (1981) considera seis enfoques diferentes que se han dado a la enseñanza del Cálculo en diferentes países: (a) *el antiguo método infinitesimal* intuitivo de Leibniz, donde los infinitesimales son considerados cantidades; (b) *el método dinámico de límite*, muy similar al anterior pero ahora los infinitesimales son considerados funciones; (c) *el método numérico*, donde la derivada puede calcularse para un valor específico de *x, e*l infinitesimal es visto como el valor numérico de una variable; (d) *el método del dibujo en el ordenador*, este enfoque muestra que parte de la gráfica no puede distinguirse de una línea recta; específicamente, la tangente a la curva en *x*, no puede diferenciarse de la gráfica en sí misma. El infinitesimal es visto como un indivisible; (e) *el método épsilon-delta*, especifica a qué distancia debe estar el *cociente de f '(x), es decir,* $[f(x + h) – f(x)] / h$ para calcular la próxima distancia a la que debe estar *h* de cero; el infinitesimal es desterrado del Cálculo; y (f) *el método infinitesimal*, este método sigue al de Leibniz pero usando la lógica moderna. Tall resumen estos enfoques de la manera siguiente:

> Todas las consideraciones que se han tenido acerca de cada uno de los enfoques, se deben lógicamente a la forma anticuada en que se da el Cálculo en la escuela, y propone que esta forma de Cálculo, debidamente interpretada, es matemáticamente correcta y constituye la mejor base para iniciarse en el Cálculo. (Tall, 1981: p.16).

Por otra parte, Artigue hace la misma distinción de Tall. Reseña la evolución de los contenidos del Cálculo, desde 1902 hasta la última reforma de 1982, pero sólo en Francia. Artigue al remontarse a 1902, señala cómo en esa época hubo una introducción generalizada del Análisis, basada en la enseñanza intuitiva (sin el uso de los infinitesimales del Cálculo diferencial e integral) considerándolo *un Cálculo estándar*. En 1960, según Artigue, el estructuralismo se vuelve dominante, el enfoque de los conceptos función, límite y continuidad se hace a través del uso de los cuantificadores. El análisis se vuelve *formal y teórico*.

Al comienzo de la década de los 80, se estudia la matemática como una ciencia construida, dependiendo de los contextos históricos y culturales. A raíz de esto último, la comisión inter IREM de 1981 enuncia una serie de proposiciones donde conceden prioridad a la enseñanza bajo un *Cálculo informal- intuitivo,* volviendo central la noción de derivada y casi haciendo desaparecer la noción de continuidad. Este Cálculo se vuelve un campo donde los procesos de aproximación desempeñan un papel esencial.

A raíz de los acontecimientos a nivel mundial descritos (Artigue, 2000; Tall, 1992) y al analizar los enfoques de la enseñanza formal e informal del Cálculo, surge en Latinoamérica (en 1982) una nueva perspectiva que incorpora los cuatro componentes de la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos cognitivos y los modos de transmisión de la enseñanza a nivel superior (Cantoral y Farfán, 2000).

El enfoque teórico latinoamericano incorpora, como ejemplo, un modelo genérico de enseñanza universitaria basada en la noción de *predicción de los fenómenos*, apoyada en el binomio de Newton. Este modelo toma como centro del diseño de instrucción, las nociones de *curva y analiticidad*. Le sirve de soporte el objeto matemático, serie de Taylor (Cantoral, 2001). Sin embargo, este modelo genérico sería insuficiente para abordar temas complejos que no se ubiquen en la matemática aplicada.

En síntesis, la variedad de enfoques en las diferentes épocas ha dejado una serie de *dificultades en la comprensión* por parte de los estudiantes, de los conceptos claves del Cálculo, conceptos que según los principios básicos de la enseñanza fueron considerados los organizadores del Análisis: (a) Cálculo alrededor del infinitesimal y la diferencial (sin los infinitesimales) dejando un análisis empírico y pragmático, (b) Cálculo alrededor de los conceptos de función, límite y continuidad, dejando un análisis teórico y formal y (c) Cálculo con enfoque intuitivo haciendo énfasis en los procesos de variación, optimización y aproximación.

Ante la panorámica analizada sobre algunos enfoques, es necesario evocar los aportes que ha dado Tall, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de algunas nociones complejas del Cálculo y que se deben considerar a la hora de decidir el más adecuado.

Tall (1991) hace referencia a la enseñanza de los conceptos complejos del Cálculo. Indica el autor que en la enseñanza con adolescentes se debe poner énfasis en el proceso de *síntesis*, pues éste se inicia con el ejercicio de la intuición, fase en la que el estudiante reúne ideas y que posteriormente, a nivel universitario, la enseñanza debe estar enfocada hacia el *análisis.* El estudiante con ayuda del profesor debe organizar las nuevas ideas en forma lógica y posteriormente refinarlas para dar deducciones y argumentaciones exactas.

Como se puede observar, paralelamente al problema pedagógico se atiende a la problemática de la naturaleza de los conceptos matemáticos en función de los fundamentos de la matemática y, por tanto, cómo debían ser aprendidos por los alumnos. Se analiza a continuación, la problemática desde los componentes cognitivo, epistémico y sociocultural.

Una teoría psicología del aprendizaje de la matemática: lo cognitivo

Para abordar la problemática Tall (1981, 1991, 1994, 1995) y Artigue (2000) entre otros, resumen las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse al campo conceptual del Análisis Matemático, detectadas a través de investigaciones empíricas. Artigue, al dar una visión de lo que se refiere a los procesos de aprendizaje en ese campo conceptual, muestra que las dificultades se pueden ubicar según tres categorías: (a) Las ligadas a la complejidad de los objetos, (b) las ligadas a la conceptualización de la noción de límite y (c) a la necesaria ruptura con modos de pensamiento característicos del funcionamiento algebraico.

En lo que respecta a las dificultades para la comprensión de los conceptos del Cálculo y, como se podría inferir, para la adquisición de los infinitesimales por parte de los estudiantes por ser un concepto complejo, están las que se ubican en torno a las nociones de función (proceso-objeto; diferentes registros de representación) y límite (obstáculo-el sentido común de la palabra límite, sobre generalización de los procesos- dimensión proceso-objeto; característica del concepto-de lo intuitivo a lo formal).

Otras dificultades se deben a las restricciones de las imágenes mentales sobre la noción de función, a la notación de Leibniz, a la selección y uso apropiado de representaciones, a la manipulación algebraica y de los cuantificadores en las definiciones. Dificultades en torno al proceso de límite como intuitivo en el sentido matemático y no psicológico, dificultades debidas a los diferentes enfoques que han existido en torno a la noción de infinitesimal y al desarrollo de los contenidos de los programas de los cursos de Análisis en cada década. Al respecto, son muchos los trabajos que se han hecho y muestran hacia dónde va el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo (Artigue, 2000; Tall, 1985, 1992). Trabajos que pretenden contribuir, desde la psicología, filosofía, historia y socioepistemología, al debate que, a lo largo de la historia, se ha generado específicamente en torno al infinito matemático. (D'Amore, 1996, 1997; Garbin, 2005; Tall, 2001).

Tall, al observar y encontrar las dificultades señaladas anteriormente, construye junto a Dreyfus una teoría psicológica del aprendizaje de la matemática, específicamente de la matemática avanzada. Matemática donde los objetos matemáticos básicos no son nuevos para el estudiante (función, número real) pero que no se pueden considerar estabilizados en su mente, de aquéllos y que es el Análisis quien va a jugar un papel esencial en su maduración y conceptualización.

En la teoría psicológica del aprendizaje de la Matemática (PMA), específicamente de la matemática avanzada o en el Análisis, han de hacerse algunas consideraciones. Por un lado, acerca de los procesos de pensamiento que usa un estudiante cuando está realizando tareas cognitivas que involucran los infinitesimales y, por el otro, acerca de la enseñanza que promueva los procesos cognitivos de síntesis y análisis en los alumnos.

Se hace necesario hacer la distinción que se establece entre el pensamiento elemental y avanzado en función de la complejidad de los conceptos, y más aún cómo es tratada tal complejidad; es decir, cómo es enfocada la enseñanza, buscando a lo largo de la historia del Cálculo los elementos caracterizadores.

Al respecto, Calvo (2001) establece las diferencias que existen entre la enseñanza de la matemática elemental y la avanzada, encontrando ciertas características que las diferencian como lo son: (a) según los conceptos que tratan, (b) los procesos de pensamiento que intervienen, (c) según los estudiantes y (d) según las estrategias de enseñanza utilizadas. Entendiendo por "etapa elemental" a aquella que tiene lugar en las clases de matemática hasta secundaria obligatoria y por "etapa avanzada", la que tiene lugar en la enseñanza de la matemática universitaria. Entre ambas etapas se ubica una de "transición" que aparece en diferentes momentos y situaciones.

Según Calvo, las diferencias esenciales en cuanto a los conceptos que se tratan es que los conceptos tratados en matemática avanzada son, en su mayoría, producto de la evolución de conceptos elementales que puede representar un período difuso y difícil de describir. En cuanto a los procesos de pensamiento que intervienen, básicamente, son los mismos: abstracción, análisis, categorización, conjeturación, definición, formalización, generalización y demostración, pero lo que varía es la frecuencia de su uso en cada etapa.

En cuanto a las características de los estudiantes en la etapa elemental, Calvo indica que la responsabilidad del aprendizaje, generalmente, recae en el profesor; mientras que en la etapa avanzada los estudiantes toman parte de esta responsabilidad. Por último, señala la autora en relación a las estrategias de enseñanza utilizadas, que en la etapa elemental se hace énfasis en actividades algorítmicas y que las definiciones son descripciones de los conceptos, tomando como base a la experiencia; en cambio en la etapa avanzada se tiende a construir definiciones formales y hacer demostraciones.

Se podría inferir que el cambio de estatus de los objetos matemáticos y de los procesos de pensamiento utilizados por el estudiante para aprender tales objetos, así como el cambio de las actividades de enseñanza, ofrece una alternativa para considerar las relaciones entre la matemática elemental y la avanzada.

En cuanto a cómo tratar el cambio de estatus de los objetos matemáticos y de los procesos de pensamiento, en la teoría psicológica propuesta por Tall y Dreyfus se postulan una serie de principios y corolarios cognitivos sobre la naturaleza de la comprensión de la matemática y sobre cómo enseñar pensamiento matemático reflexivo. Tall (1994) indica que existen varios métodos para comprender en matemática: (a) representando visualmente la información, ya que las imágenes como los diagramas y las gráficas proporcionan una gran cantidad de información para ser incorporados en una sola idea. La mente humana escoge propiedades implícitas de las imágenes y las incorpora al esquema conceptual; (b) usando símbolos para representar información, ya que el símbolo es tratado como un objeto matemático y en sí mismo es manipulado como un objeto mental, y (c) poner el foco de atención de los objetos en la estructura de sus propiedades y relaciones.

Según Tall (1994), los estudiantes no tienen bien desarrolladas las estructuras cognitivas, por lo que son engañados por las falsas imágenes. Los estudiantes tienen sus propios esquemas conceptuales asociados a los conceptos, esquemas desarrollados a través de sus propias experiencias previas (Tall y Vinner, 1981; Tall, 1994, 2001).

Tall infiere que tales imágenes como los diagramas y las gráficas, proporcionan una gran cantidad de información. El uso del software al ser manipulado por el usuario con el objeto de ver relaciones dinámicas, hace poderosa la visualización de los conceptos matemáticos. El software sirve para abordar, entre otras, la idea no estándar del infinitesimal, haciendo posible una aproximación visual de las nociones de diferenciabilidad y ver microscópicamente una línea con infinitesimales. Con esto, Tall muestra hacia dónde va la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.

Por otro lado, Dreyfus (1991), quien junto con Tall participa en la elaboración de la teoría psicológica del aprendizaje de la matemática avanzada, indica que los procesos que permiten tratar los conceptos avanzados como los que se indicaron en los párrafos precedentes, son en particular, la abstracción y la representación. Mediante estos dos procesos, el alumno puede moverse de un nivel a otro y así manejar la complejidad de los conceptos.

Sin embargo, Dieudonné (citado por Artigue, 2000) expresa que los procesos fundamentales para el análisis son aproximar, subestimar y sobrestimar, pues los objetos se trabajan muchas veces con propiedades locales dando un papel predominante a la desigualdad y al modo de razonamiento local, como es el caso de la igualdad, la cual está asociada a la idea de proximidad local finita ($\forall \varepsilon > 0$, $d(A, B) < \varepsilon$ entonces $A = B$).

En síntesis, podría decirse que cualquier teoría del aprendizaje matemático debe tomar en cuenta no sólo las ideas previas de los estudiantes sino que debe ser vista dentro del más amplio contexto de la actividad humana (su razonamiento funcional, analítico, algebraico, numérico) y cultural (pragmática, formal, intuitiva o una mezcla de ellas).

Ahora bien, si bien es cierto que se ha de considerar cómo es enfocada la enseñanza de ciertas nociones matemáticas, y cómo se llega a su comprensión, no es menos cierto que se deba dilucidar la evolución de la noción o concepto para interpretar factores determinantes de los procesos de construcción El estudio de la evolución histórica y epistemológica de un concepto puede dar luz de cómo nace y se desarrolla, cómo se plantean y construyen los procedimientos relacionados y qué limitaciones conceptuales aparecen en el aprendizaje de la noción (Crespo, 2006).

El estudio de la evolución histórica de la noción de infinitesimal en particular, tiene utilidad ya que permite diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción en una época histórica a partir del trabajo realizado por los matemáticos representativos, razón que permite abordar el tercer componente del triángulo didáctico: el punto de vista epistemológico.

La génesis y evolución histórica de un concepto: lo epistemológico

El punto de vista epistemológico se detecta al estudiar la génesis histórica y evolución de un concepto en la historia o bien en los libros de texto; ya que como lo señala Ruiz (1998, p. 40), "para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados". Esto hace considerar la pluralidad de puntos de vista posibles que le han sido asociados (ideas, conceptos o proceptos asociados, contextos, procedimientos, métodos y representaciones) y poner en evidencia su mayor o menor adaptación a la resolución de diferentes problemas.

Al respecto, se han realizado en los últimos años, análisis epistemológicos, específicamente análisis histórico-epistemológicos para tener una herramienta que posibilite acercarse a describir concepciones ligadas al desarrollo de ciertas nociones matemáticas, como lo son función, infinitesimal y polinomios entre otros y poder con ello diseñar unidades didácticas que permitan mejorar el proceso de adquisición de tales nociones. (Burn, 2005; Escobar y Valdivé, 2007, Fernández y Valdivé, 2007 y, Valdivé y Garbin, 2007).

Por una parte, Artigue (1989, 1990, 1992, 1995) ha señalado sus potencialidades y alcances, y la necesidad que el didacta tiene de realizar un estudio epistemológico. Sierpinska (1985, 1992) y Brousseau (1983) entre otros lo utilizan para determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática. Godino, Ruiz, Roa, Pareja y Recio (2003) lo utilizan para el análisis de Recursos Interactivos usando algunas herramientas de la "teoría de las funciones semióticas" (Godino, 2002a; 2002b).

Bergé y Sessa (2003) identifican tres "modos de uso didáctico" del análisis histórico-epistemológico. Afirman que permite recuperar la complejidad de los objetos estudiados y ensancha las concepciones epistemológicas, amplía la capacidad del investigador para interpretar las conductas y respuestas de los alumnos y, por último, provee insumos para pensar una problematización adaptada al aula.

El análisis epistemológico permite tener una visión retrospectiva de los diferentes "momentos" (en términos de Newton) por los cuales ha pasado una noción, específicamente, el infinitesimal:

En un primer "momento" los infinitesimales fueron "vistos" como "ideas nacientes" asociadas a una razón como conocimiento previo, manteniéndose este esquema conceptual hasta inicios del siglo XIV. En un segundo "momento", las ideas evolucionan sobre la base de las experiencias de los matemáticos en el campo de la física y la astronomía. Se concibe el infinitesimal asociado a un indivisible. En el siglo XVII, acontece un salto epistemológico con el surgimiento de ideas ligadas a la noción que nos permite asociarlas a ellas. En este "momento", el infinitesimal es "visto" como imperceptible e indivisible y como una razón aritmética. Para finales del siglo XVII e inicios del XVIII, el infinitesimal se representa con los símbolos*: dx, dy, o, w, ox, oy*, *ds, dy/dx.* Finalmente, po-

EDUCERE • Artículos arbitrados • ISSN: 1316 - 4910 • Año 12, Nº 42 • Julio - Agosto - Septiembre, 2008 • 531 - 538.

demos decir que la definición de los números reales en el siglo XIX, hizo posible otorgar una definición para un infinitésimo. El infinitesimal es una variable y es un valor numérico real (δ-ε) de esa variable, lo que permite otorgarle una caracterización de función al esquema conceptual epistemológico.

Como se viene expresando a lo largo del escrito, existen diferentes clases de mentalidades matemáticas, diferentes contextos en los que se han construido los conceptos a lo largo de la historia y diferentes enfoques acerca de su enseñanza, que han estado marcados por los fundamentos de la matemática. Se hace imprescindible conjugar esas tres visiones para comprender un enfoque didáctico que tome en cuenta esos tres componentes pero que a su vez incorpore el plano sociocultural del aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

Las diferentes matemáticas: lo sociocultural

Hay que tomar en cuenta que un ser humano individual podría tener diferentes aptitudes ante un concepto, dependiendo si es considerado en un contexto analítico o aplicado (en la física, la astronomía, la ingeniería), o bien si es adquirido de las experiencias previas que ha tenido con dicho concepto y, por tanto, del significado que le ha otorgado desde su cultura. Esto hace ver una epistemología de la matemática, en términos de los argumentos de las fundamentaciones de la matemática del siglo XX y una epistemología sobre la enseñanza y el aprendizaje cimentada en las fundamentaciones de la matemática.

La matemática es reconocida por la Socioepistemología como una actividad cultural y, por lo tanto, es necesario ubicar cada uno de sus conceptos en el escenario cultural en que surgió y se desarrolló. Las condiciones en que se genera un concepto, la manera de pensar de quienes le dieron origen, la finalidad y manera en que fue trabajado y transmitido, cómo era la sociedad en la que se desarrolló, qué intereses tenía, cómo pensaba, qué la preocupaba y muchas otras cuestiones, dan forma al escenario correspondiente. El concepto de infinitesimal no ha sido siempre el mismo como bien se mostró en el apartado anterior, ha evolucionado notablemente a través de la historia. Esta idea se encuentra ligada al escenario sociocultural en que nos ubiquemos variando considerablemente de una cultura a otra.

En particular, se pudo observar en la historia del desarrollo del Cálculo que Weierstrass redujo el análisis a una prolongación aritmética, Riemann buscó la geometría, y Leibniz y Newton lograron una extensión del álgebra con base en consideraciones físicas y/o geométricas y con algoritmos que involucraban cantidades infinitesimales.

Hubo situaciones histórico-sociales que permitieron estudiar las nociones matemáticas en función de las necesidades de la sociedad. Por ejemplo, los hechos importantes de la conquista de América, entre otros, plantean en la época (siglo XV y XVI) la invención de armas de fuego, la construcción de naves y de relojes más exactos para dominar la astronomía y la navegación, obteniéndose resultados prácticos e inmediatos (centro de gravedad, principio físico de los momentos de Newton) que el método griego existente no proporcionaba. Así mismo, en la segunda mitad del siglo XVII (etapa de transición hacia el capitalismo), se utilizan los infinitesimales para resolver problemas de dinámica y geometría (Boyer, 2003; Edwards, 1979). Por tanto, las concepciones del estudiante y del profesor se centran en cómo ven la matemática; es decir, en su cultura. En tal sentido, surge la imperiosa necesidad de tomar en cuenta la cultura donde se hace matemáticas: la escuela, la universidad y la vida.

2. La propuesta

En los planteamientos de Artigue, Dieudonné, Tall y Dreyfus se puede notar el requerimiento básico para que un estudiante logre realizar tareas cognitivas complejas, en especial, tareas que involucren conceptos de la matemática avanzada: *un salto cualitativo del pensamiento algebraico al pensamiento analítico.*

Tal salto puede lograrse si la enseñanza desde la matemática elemental a la avanzada se enfoca en la enseñanza de los procesos más que de los productos del pensamiento. Igualmente en que el estudiante aprenda a sintetizar y luego a analizar. Si se promueve el razonamiento local, para lograr con ello que el alumno reflexione sobre su propia experiencia matemática, que pueda alcanzar las metodologías que los matemáticos maduros practicaron para llegar a los productos acabados y una oportunidad de manipular los software y no un inventario de procedimientos y una gran variedad de conocimientos que no le permiten solucionar todo tipo de problemas.

Sin embargo, es necesario acotar que para lograr tal salto cualitativo, hay que tomar en cuenta que un ser humano individual podría tener diferentes actitudes ante un concepto, dependiendo de si es considerado en un contexto analítico o aplicado, o bien de las experiencias previas que ha tenido con dicho concepto (Tall, 1991). Esto hace asumir una epistemología de la matemática, en términos de los argumentos de las fundamentaciones de la matemática del siglo XX, tal como se viene señalando en párrafos anteriores. Siglo que ha visto la caída en desuso de los puntos de vista intuicionista y un triunfo de una mezcla pragmática de formalismo y logicismo, tal como lo señala Tall (1991, p. 10):

> Los conceptos matemáticos no sólo existen cuando su construcción es demostrada a partir de los enteros

> (punto de vista intuicionista), ni solo es manipulación significativa de símbolos carentes de sentido escritos en un papel (punto de vista formalista), ni consisten en deducciones usando las leyes de la lógica (punto de vista logicista) …Es una mezcla pragmática de formalismo y logicismo. Ningún punto de vista tiene aceptación universal.

O como bien lo señala Poincaré (1913, p. 210):

> …Entre nuestros estudiantes nosotros notamos las mismas diferencias; algunos prefieren tratar los problemas por análisis, otros por geometría. Los primeros son incapaces de ver el espacio, los otros rápidamente se cansan de largos Cálculos y quedan perplejos.

Los argumentos anteriores permiten abordar la construcción de los infinitesimales en el pensamiento de los estudiantes desde la matemática elemental, por medio de un *constructivismo pragmático*, que tome en cuenta la distinción entre *objetos matemáticos personales y formales*. Problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos, pues es allí cuando se inducen la síntesis y los procesos de pensamiento que lo harían avanzar hacia un pensamiento con eje articulador funcional, que hacen al estudiante ir de un constructor de un esquema conceptual informal y/o formal (objeto personal) asociado a los infinitesimales, a un *constructor pragmático* de un concepto formal.

La enseñanza por su parte, debe retomar el papel de la evolución de la noción en la historia, el contexto donde emergió, los métodos matemáticos y los problemas que hicieron posible su aparición.

3. A manera de conclusión

El educador matemático universitario se debe convertir en un investigador que, a la hora de su praxis, tome en cuenta que la enseñanza desde la matemática elemental a la avanzada se enfoca en primera instancia en la enseñanza de los procesos más de los productos del pensamiento, y en las dificultades que han tenido en su evolución la construcción de ciertas nociones matemáticas. Luego, enfocarse en los conceptos del Cálculo a lo largo de la historia, específicamente en los infinitesimales, como alma del Cálculo. Finalmente poder inducir cuáles enfoques que se han dado al Cálculo, son matemáticamente correctos y cuáles significados se le han atribuido a los conceptos, para convertir al alumno en constructor de su propio aprendizaje. ⓔ

* Magíster en Matemática, mención Enseñanza de la Matemática. Profesora de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado".

Bibliografía

Artigue, M. (1989). Epistemologie et Didactique. *Cahier de DIDIRENT*, 3. IREM. Université Paris VII.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 241-286.

Artigue, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. *Proceedings of the 16th Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education 16*, Durham, vol. 3, 195-216.

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. *Planary Lecture*, CMESG, Proceedings, 7-21.

Artigue, M (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En *Actas del 8o Congreso Internacional de Educación Matemática.* pp. 23-51.

Bergé, A. y Sessa, C (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 6. Num 3. pp. 163-197.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza.

Brousseau, G. (1983). Les Obstacles épistémologiques et les problemas en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 164-198.

Burn, B. (2005). The Vice: Some Historically inspired and proof-Generated Steps to Limits of Sequences. *Educational Studies in Mathematics.* 60 (3) 270-295.

Calvo (2001). El papel de las definiciones en Matemáticas. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al análisis. *En Actas del 8o Congreso Internacional de Educación Matemática*, pp. 12-21.

Crespo, C. (2006). Un paseo por el paraíso de Cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (19). México: CLAME, pp. 22-27.

Bibliografía

D'Amore, B. (1996). L'Infinito: storia di conflitti, di sorpresa, di dubbi. *La matematica e la sua Didattica*,3, 322-335.

D'Amore, B. (1997). L'Infinito in didattica della matematica, La matematica e la sua Didattica, 3, 289-305.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed) *Advanced mathematical thinking.* (pp. 25-41), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*, New York: Springer-Verlag.

Escobar, H. y Valdivé, C. (2007). Estudio de los polinomios desde la perspectiva de la Matemática Elemental. Tesis de maestría no publicada. Maestría Interinstitucional en Matemática. Barquisimeto: UCLA, UNEXPO, UPEL-IPB.

Fernández, N. y Valdivé C. (2007). Esquemas conceptuales asociados a la noción de polinomio. Tesis de maestría no publicada. Maestría Interinstitucional en Matemática. Barquisimeto: UCLA, UNEXPO, UPEL-IPB.

Garbin (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 8 (2), 169-193.

Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), pp. 125-143.

Godino, J. D. (2002b). Studying the median: a framework to analyse instructional processes in statistics education. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education (CD Rom).

Godino, Ruiz, Roa, Pareja y Recio (2003). Análisis Didáctico de Recursos Interactivos para la Enseñanza de la Estadística en la Escuela. *IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet.* Berlin, Germany, 11-12 August, 2003. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm. [Consulta 2006: Agosto 26]

Poincaré, H. (1913). *The Foundations of Science,* New York: The Science Press, (University Press of America edition, 1982)

Ruiz, L., (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Jaén. España.

Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l' ensignement des Mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIAEM* (pp.73-95). Leiden.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) The concept function. *Aspect Epistemology and pedagogy.* 25-58. USA: Mathematical Association of America.

Tall, D. (1981). Comments on the Difficulties and Validity of Various Approaches to the Calculus. *For the Learning of mathematics* 2(2) pp. 1-12, Publishing Association: Montreal, Quebec.

Tall. D. (1985). Understanding the Calculus. *Mathematics Teaching,* 110 (49-53).

Tall. D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D (Ed) *Advanced mathematical thinking.* (3-20), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Tall. D. (1992). Student´s Difficulties in Calculus. Plenary presentation in working group 3, ICME., Quebec, Canadá.

Tall. D. (1994). Understanding the processes of Advanced Mathematical Thinking. An invited ICMI lecture at the International Congress of Mathematicians, Zurich.

Tall. D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Conference of the International Group Psychology of Learning Mathematics,* (1) (161- 175) Recife, Brazil.

Tall, D. (2001).). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*. 48(2 y 3), 200-238.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2007). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución Histórica de la Noción de Infinitesimal. (*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* en prensa).