

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA**

Tesis Doctoral:

***Potencial en Dominios Cuneiformes, y en Dominios
Estratificados y su Aplicación en Sistemas de Potencia
Eléctrica***

Presentada en la Facultad de Ingeniería
De la Universidad de Los Andes
Para la obtención del
Grado de Doctor en Ciencias Aplicadas

Autor: J. Hildemaro Briceño M
Tutor: Prof. Florencio Plachco

Mérida, Noviembre, 2003

Resumen de la Tesis

El modelo matemático, y posteriormente circuital, de los problemas asociados a la transmisión de energía eléctrica a la frecuencia de 60 Hz se debe hacer, en principio, mediante el estudio del campo electromagnético asociado. Para ésta frecuencia la ecuación de Helmholtz asociada a variaciones armónicas en el tiempo de campos electromagnéticos se puede reducir a la ecuación de Laplace, asociada a campos invariables en el tiempo. Este es el caso del estudio de los Sistemas de Conexión a Tierra y el estudio de la distribución del campo eléctrico en medios dieléctricos. La solución algebraica de estos problemas, salvo casos de geometrías relativamente simples, es prácticamente imposible. En espacios acotados se han desarrollado métodos numéricos ampliamente conocidos: métodos de elementos finito(FEM), método de elementos de contorno(BEM), diferencias finitas(FDM) entre los más populares. Sin embargo para espacios infinitos y geometrías con singularidades geométricas: cuñas y esquinas, éstos métodos pueden no ser eficientes si no tienen asociadas la función de Green adecuada.

El objetivo del trabajo desarrollado en esta tesis está dirigido a dos casos específicos: estudiar la función de Green necesaria para medios heterogéneos para su aplicación en el diseño de Sistemas de Conexión a Tierra operando en la frecuencia de 60 Hz, y estudiar la función de Green para dominios cuneiformes.

En primera instancia el esfuerzo se orientó hacia la comprensión y solución de problemas de contorno en espacios infinitos. Se estudió en detalle el problema de Dirichlet para un cuerpo con simetría axial en el espacio libre. La solución de este problema involucró el estudio de los potenciales de doble capa, ya que la solución se ha postulado en función de estos potenciales.

La determinación de la distribución de potencial en dominios cuneiformes es particularmente importante en el estudio del aislamiento eléctrico en dominios que se puedan modelar mediante cuñas. El resultado obtenido motivó la extensión del trabajo hacia la influencia de terrenos no planos, en la determinación de los parámetros de impedancia serie y admitancia paralelos de líneas aéreas de transmisión de potencia eléctrica. Tradicionalmente estos parámetros se determinan asumiendo que el terreno bajo la línea es plano, en Latinoamérica este no es el caso ya que gran parte de los países de Centroamérica y América del Sur están ubicados en zonas geográficas con cadenas montañosas relevantes. De una manera natural a partir de los resultados obtenidos se encontró también la solución para Sistemas de Conexión a Tierra en terrenos homogéneos con fronteras en la superficie en forma de dominio cuneiforme.

El diseño de Sistemas de Conexión a Tierra en terrenos heterogéneos se apoya en la solución obtenida mediante las funciones de Green para una fuente puntual de corriente. El trabajo desarrollado fue motivado hacia el objetivo de conseguir la función de Green para modelos de terrenos estratificados verticalmente con resistividades y espesores de estratos dados. Una vez obtenida la función de Green la extensión para electrodos lineales se puede hacer mediante el método del potencial promedio.

Las principales contribuciones de esta tesis son las siguientes:

- Se obtuvo la solución numérica del problema de cuerpos cargados eléctricamente en un medio infinito mediante potenciales de doble capa.
- El estudio de la función de Green para medios cuneiformes ha permitido el cálculo de parámetros de líneas de transmisión aéreas en terrenos no planos, y el estudio de los

potenciales asociados a Sistemas de Conexión a Tierra en terrenos homogéneos no planos.

- El desarrollo de la función de Green para una fuente puntual de corriente en terrenos estratificados hecho de una manera sistemática para cualquier número de estratos. Este resultado, mediante el método del potencial promedio, permite su extensión a electrodos lineales para el diseño de Sistemas de Conexión a Tierra en éste tipo de terreno.

LISTA DE FIGURAS

1	Problema de contorno en un dominio cuneiforme.....	3
2	Tres casos típicos de una línea de transmisión en terreno montañoso.....	4
1.1	Carga puntual en un espacio tridimensional.....	6
1.2	Dipolo eléctrico.....	7
1.3	Distribución superficial de carga q_s	8
1.4	Distribución de dipolos q_D	8
1.5	Ángulo sólido visto desde el punto P.....	9
1.6	Distribución dipolar lineal sobre un contorno.....	10
1.7	Discontinuidad del potencial de doble capa.....	11
1.8	Dominios para los problemas de Dirichlet: interior y exterior.....	12
1.9	Elipsoide de revolución.....	16
1.10	Distribución superficial de carga.....	20
2.1	Fuente campo q en un dominio cuneiforme.....	21
2.2	(a) Imágenes para $2\Phi=\pi/4$. (b) Imágenes para $2\Phi=3\pi/4$	22
2.3	Plano cortado $\alpha=\zeta+j\gamma$	25
2.4	Relación V_s/V_e en función del número de términos J para la solución con series.....	28
2.5	Carga lineal q en un dominio cuneiforme con $\Phi=\pi$	28
2.6	Tres casos típicos de una línea de transmisión en terreno montañoso.....	29
2.7	Dimensiones de la línea de transmisión seleccionada para el estudio en terrenos Montañosos:(a) Geometría sobre un terreno plano horizontal.(b) Geometría sobre un terreno plano inclinado.....	30
2.8	Distancias y coordenadas polares para los conductores.....	31

3.1	Terreno multiestratificado con fuente puntual de corriente en el estrato j	37
3.2	Modelo de un terreno de cinco estratos.....	50
3.3	(a) Función $(1-v_5)/v_5$ y aproximación mediante funciones exponenciales.(b) Error porcentual entre $(1-v_5)/v_5$ y la aproximación.....	51
3.4	Terreno de tres estratos y barra vertical de $L=3,0$ m, radio $a=0,5$ cm.....	51
3.5	(a) Curvas para $1/v_3-1$ y $FA-1$ v.s u .(b) % error $100(1-v_3FA)/(1-v_3)$ v.s u	52
3.6	Voltaje en el terreno v.s z	53
3.7	Variación de la resistencia R en función de la profundidad de penetración L . Curva 1: Terreno de tres estratos ver Fig. 3.4. Curva 2: Terreno de dos estratos, $h=1,0$ m, $\rho_1=100 \Omega\text{-m}$, $\rho_2=1000 \Omega\text{-m}$ Curva 3: Terreno de dos estratos, $h=2,5$ m, $\rho_1=100 \Omega\text{-m}$, $\rho_2=1000 \Omega\text{-m}$	54
3.8	Resistencia a tierra en función de la relación ρ_2/ρ_3	55
3.9	Terreno biestratificado.....	56
3.10	Casos típicos de Sistemas de Conexión a Tierra(SCT) en localidades montañosas.....	57
3.11	Fuente puntual de corriente inmersa en un terreno homogéneo de resistividad ρ , formando una cuña de ángulo 2Φ	58
3.12	Perfil de voltajes sobre la superficie del terreno para una fuente puntual de corriente ubicada a una distancia $x_o=1,0$ m del vértice de la cuña. En el eje horizontal r negativo indica que está sobre la frontera $-\Phi$	58
3.13	Resistencia a tierra R en función del ángulo Φ , para un electrodo horizontal de longitud $L= 4,0$ m, radio $a=0,005$ m, enterrado a una profundidad de $0,5$ m, paralelo al vértice de la cuña. R_o resistencia obtenida par un terreno homogéneo plano.....	59
3.14	Electrodo lineal paralelo al eje x	60
3.14	Resistencia a tierra R en función del ángulo Φ , (a) Electrodo horizontal, longitud $L=4,0$ m, radio $a=0,005$ m.(b) Electrodo vertical, longitud $L=2,0$ m, radio $a=0,005$ m R_o resistencia obtenida para un terreno plano.....	61
3.15	Cuatro casos mas comunes de electrodos lineales en la construcción de sistemas de conexión a tierra. (a) Electrodos horizontales paralelos. (b) Electrodos horizontales perpendiculares. (c) Electrodos verticales paralelos (d) Electrodo vertical perpendicular a electrodo horizontal.....	62

- 3.16 Perfiles de voltaje sobre la superficie del terreno en la dirección r y para $z=2$ m. El signo negativo en la escala horizontal indica que la distancia r se mide hacia $-\Phi$,
(a) Electrodo horizontal paralelo al vértice de la cuña. (b) Malla 4x4 m..... 63

ÍNDICE

Resumen de la tesis.....	i
Lista de figuras.....	iii
Introducción.....	1
CAPITULO 1: TEORÍA DE POTENCIAL.....	6
CAPITULO 2: POTENCIAL EN DOMINOS CUNEIFORMES.....	21
CAPITULO 3: FUENTE PUNTUAL DE CORRIENTE EN TERRENO MULTIESTRATIFICADO HORIZONTALMENTE, Y TERRENO NO PLANO.....	36
APÉNDICE A: ECUACIONES DE MAXWELL.....	65
APENDICE B: IMÁGENES A PARTIR DE LA SOLUCIÓN INTEGRAL.....	72
APENDICE C: MATRIZ $T=MW$ DE VECTORES PROPIOS APROXIMADOS.....	76
APÉNDICE D: TERRENO DE TRES ESTRATOS.....	79
REFERENCIAS.....	82

Introducción

La solución de problemas de campos electromagnéticos en régimen permanente que varían armónicamente en el tiempo, conduce a la solución de problemas de contorno gobernados por la ecuación de Helmholtz. Para bajas frecuencias como la frecuencia de potencia, 60 Hz, el problema de contorno se puede aproximar mediante la ecuación de Laplace y el problema se reduce a buscar una función potencial que satisfaga la ecuación de Laplace bajo ciertas condiciones de contorno.

La solución de las ecuaciones de Helmholtz y Laplace en sistemas de coordenadas ortogonales ha sido ampliamente estudiada [7, 22, 36, 37, 43, 56, 59]. Sin embargo en la práctica los problemas modelados en sistemas ortogonales son limitados. Los métodos numéricos emergen como una forma de solución general aproximada. Destacan actualmente cuatro métodos numéricos ampliamente difundidos y utilizados: elementos finitos (FEM), elementos de contorno (BEM), diferencias finitas (FDF) y el método de colocación de cargas (CCM).

El método de los elementos finitos y el de las diferencias finitas han sido exitosos para el estudio de problemas en dominios acotados, donde la elaboración de una malla o rejilla para discretizar el dominio puede ser controlada con mayor o menor densidad. En el método de los elementos finitos la malla puede ser regular o irregular con la finalidad de aumentar su densidad en puntos críticos de la geometría del dominio. El método de las diferencias finitas, que debe su vigencia gracias al desarrollo de métodos multipaso, requiere diferentes densidades de la rejilla o malla.

El método de los elementos de contorno [8] conduce a un sistema de ecuaciones integrales de segunda clase, cuya solución numérica requiere la discretización de las fronteras del dominio de interés. Esto representa una ventaja sobre el método de los elementos finitos y las diferencias finitas.

El método de colocación de cargas [51], tiene su fundamento en la ubicación de cargas ficticias: puntuales, lineales, superficiales, volumétricas colocadas fuera de las fronteras del dominio de interés, originando un sistema de ecuaciones integrales de primera clase para determinar el valor de estas cargas cumpliendo con las condiciones impuestas en la frontera del dominio de interés. Mediante la discretización del dominio estas ecuaciones integrales se transforman en un sistema de ecuaciones lineales. El principal punto que todavía sigue siendo objeto de investigación es determinar a qué distancia de la frontera deben ubicar estas cargas ficticias. Una alternativa para evitar la formulación matemática mediante ecuaciones integrales de primera clase es utilizar los potenciales de doble capa o dipolos. Los potenciales de doble capa permiten formular los problemas mediante ecuaciones integrales de segunda clase, para quienes la existencia y unicidad de la solución ha sido estudiada más detalladamente que en el caso de las ecuaciones integrales de primera clase.

La solución de problemas en dominios con fronteras infinitas mediante los métodos mencionados tienen como estrategia fundamental colocar una frontera ficticia a una distancia determinada, y resolver el problema en cuestión. Luego ubicar la frontera ficticia a una mayor distancia y resolver de nuevo el problema. Si la solución no presenta cambios sustanciales, se presume que esa es la solución para fronteras que se ubiquen en el infinito. La consecuencia de esta estrategia es que la malla o rejilla se puede extender a límites donde el número de puntos o subdominios de discretización puede llegar a ser muy elevado, lo cual debe tomarse en cuenta

para la solución del sistema de ecuaciones lineales que se genera en cada método. Es de notar que la solución de sistemas lineales de ecuaciones con un número elevado de ecuaciones es todavía un tema abierto. Sin embargo debe diferenciarse el caso de fronteras infinitas con condiciones de contorno locales, del caso de dominios infinitos con condiciones de frontera en puntos infinitamente lejanos. Cuando se tienen condiciones de contorno en el infinito, éstas pueden ser satisfechas automáticamente mediante las funciones de Green. Estas funciones son utilizadas en la formulación matemática mediante ecuaciones integrales en los métodos de elementos de contorno y colocación de cargas. Un ejemplo típico de fronteras infinitas con condiciones de contorno es el caso de medios heterogéneos que se extienden infinitamente en una o más direcciones.

Para dominios cuneiformes, que poseen puntos de singularidad geométrica, se han podido establecer las condiciones para que exista una solución matemática. Uno de los trabajos clásicos en este aspecto es el de V.A Kondrat'ev[40]. Notable el desarrollo matemático de este tipo de problemas iniciado por M. Dauge en 1988[18], y posteriormente junto a M. Costabel han proseguido el estudio en diferentes trabajos [15,16], y una monografía dedicada a las singularidades de los campos electromagnéticos en dominios poliédricos [17]. El principal aspecto que marca la diferencia con la solución obtenida para un dominio suave, sin cuñas o esquinas, radica en que para los dominios con cuñas o esquinas la solución no es infinitamente diferenciable en el vértice de la cuña o esquina, ya que no tienen derivada definida en estos puntos. En consecuencia, la solución no puede ser análoga a la obtenida para dominios suaves[40,66].

La indefinición de una derivada en los vértices de un dominio con cuñas o esquinas, es lo que impide que los métodos numéricos desarrollados para dominios con fronteras suaves sean eficientes para obtener, con una aproximación controlada, el valor del potencial y en especial del campo eléctrico en las proximidades del vértice, hecho importante para el diseño del aislamiento eléctrico en este tipo de geometría. Un aspecto importante cuando se utilizan métodos numéricos, como el método de los elementos finitos, es la extrema lentitud con la que convergen estos métodos a una solución aproximada del potencial en las proximidades de los vértices[2]. En [68] se hace referencia del trabajo de Laasonen, donde se demuestra la convergencia de la solución del problema de Dirichlet en dominios con cuñas o esquinas mediante métodos numéricos, sin embargo ésta convergencia es lenta en las vecindades de la cuña o esquina. Esto da pie para una segunda pregunta, si el grado de exactitud máximo está limitado en la práctica en la zona próxima al vértice por la densidad de la malla utilizada para discretizar el dominio, ¿como se ve afectada la exactitud en el resto del dominio de interés por este grado de exactitud? . Es decir si existe una zona del dominio con aproximación cuestionable, el vértice, hasta que punto esta solución cuestionable contamina la solución en el resto del dominio[2].

Para los métodos numéricos más reconocidos existen diferentes estrategias para resolver problemas de contorno con cuñas o esquinas. La estrategia utilizada depende de la forma de discretización del método utilizado. Por ejemplo en el caso del método de colocación de cargas la estrategia para acercarse al vértice es colocar cargas ficticias en puntos adyacentes al vértice, hasta que punto de proximidad al vértice se puede llegar es una pregunta abierta. En el caso de elementos finitos se puede utilizar una discretización irregular que se hace más densa en las cercanías de la singularidad geométrica. Para los métodos con discretización del contorno la estrategia más simple es acercarse a una distancia lo más pequeña posible de la singularidad geométrica, mediante una discretización densa de la frontera en cuestión. Sin embargo cuando se utilizan funciones de aproximación lineal, el vértice está involucrado explícitamente en un

terminal del elemento de contorno, originando problemas por el salto de la derivada normal a uno y otro lado del vértice[35,64]. La obtención de la función de Green para dominios cuneiformes que satisfaga una condición de contorno que incluya la singularidad geométrica, es un avance significativo en la solución aproximada de este tipo de problemas mediante algunos de los métodos mencionados.

Para dominios cuneiformes, ver figura 1, la solución de diferentes tipos de problemas gobernados por la ecuación de Helmholtz y Laplace, puede postularse como una solución integral compuesta de un núcleo $K(R)$, que satisface la ecuación homogénea, y una función $H(\alpha, \varphi)$ que se determina para garantizar las condiciones de contorno en $\varphi = \pm\Phi$ [49,58]. R es función del parámetro de integración α . Es decir

$$V(r, \varphi) = \int_{\gamma} K(R).H(\alpha, \varphi)d\alpha$$

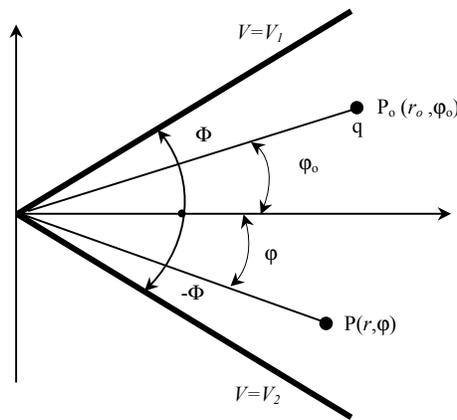


Fig. 1 Problema de contorno en un dominio cuneiforme

El camino de integración γ juega un rol fundamental en el cumplimiento de las condiciones de contorno para $r = 0$ y $r \rightarrow \infty$. La obtención del núcleo $K(R)$ no ofrece mayor dificultad ya que pueden ser las funciones de Green para fuentes lineales o puntuales de campo. Las funciones $H(\alpha, \varphi)$ se determinan mediante ecuaciones funcionales que se obtienen cuando se exige a la solución integral cumplir las condiciones de contorno[49]. Para condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann que se anulan en $\pm\Phi$ las ecuaciones funcionales que emergen son de la siguiente forma:

$$H(\alpha + \Phi) \pm H(-\alpha + \Phi) = 0$$

$$H(\alpha - \Phi) \pm H(-\alpha - \Phi) = 0$$

El signo negativo corresponde a las condiciones de Dirichlet, y el signo positivo para las condiciones de Neumann.

En los sistemas de potencia eléctricos se tienen dos aplicaciones fundamentales donde se requieren las soluciones para dominios cuneiformes. Ha sido práctica común para la determinación de los parámetros de líneas de transmisión aéreas, asumir que el terreno sobre el

cual se encuentra la línea ubicada es completamente plano[9]. De igual forma ocurre para los sistemas de conexión a tierra utilizados en las diferentes instalaciones eléctricas[20, 31, 60]. Sin embargo existen países ubicados sobre zonas geográficas tales, que tienen una parte sustancial de su territorio ubicado en zonas montañosas, como por ejemplo la mayoría de los países suramericanos que se encuentran ubicados sobre la Cordillera de los Andes. Hasta el momento no se tiene conocimiento de algún estudio que determine hasta que punto la solución obtenida para un terreno plano puede extenderse para terrenos de superficie irregular. O cual es el efecto de la presencia de irregularidades en la superficie del terreno sobre los parámetros de una línea de transmisión. Mediante la solución propuesta en forma integral para dominios cuneiformes, es posible tener un primera aproximación del efecto de estas irregularidades, asumiendo que se pueden representar mediante una cuña de longitud infinita. Por ejemplo en la figura 2 se muestran tres casos típicos de una línea de transmisión a través de una geografía montañosa.

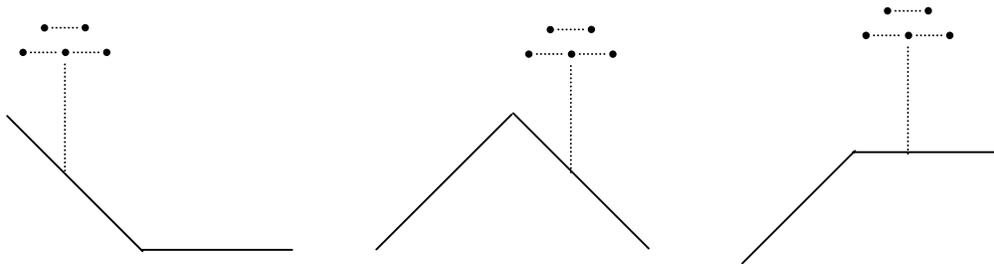


Fig. 2 Tres casos típicos de una línea de transmisión en terreno montañoso

En dominios cuneiformes el efecto de la cuña provoca la difracción del campo electromagnético asociado a cada una de las fases de la línea de transmisión. Este fenómeno se hace mas pronunciado a bajas frecuencias, siendo máximo para campos eléctricos y magnéticos estacionarios. Es oportuno acotar que el fenómeno de la difracción de campos electromagnéticos ha sido ampliamente estudiado y referenciado, incluyendo procesos de propagación de ondas de diferentes tipos como las acústicas y la difracción del calor. En el trabajo de F. Plachco[49] se encuentra el desarrollo completo de la difracción asociada al calor, y una extensa recopilación bibliohemerográfica sobre el fenómeno de la difracción y el desarrollo histórico de la solución de los problemas asociados a este fenómeno.

Por el otro lado en estas zonas geológicamente jóvenes, la heterogeneidad del terreno es notable por lo que cualquier solución de problemas asociados a sistemas de conexión a tierra tiene que hacerse asumiendo un terreno multiestratificado. De igual forma para estos medios heterogéneos se requiere de las funciones de Green respectivas, que satisfagan las condiciones de contorno impuestas en las fronteras de los medios[14]. En la literatura se han encontrado las bases para el desarrollo de las funciones de Green necesarias para este tipo de problemas. En un primer intento se trabajo con la teoría de las imágenes múltiples originadas por la reflexión en cada frontera de separación entre estratos [42], sin embargo esta vía de solución requiere un considerable esfuerzo de cálculo. En [21] se menciona un método eficiente de imágenes que resuelven el problema, pero no se da detalle alguno al respecto.

Takahashi y Kawase[61], estudiaron la resistencia a tierra de una barra vertical enterrada en un terreno multiestratificado, sus resultados fueron el desarrollo de una manera sistemática de la solución de la distribución del potencial en cada estrato, sin embargo esto se hizo en el denominado dominio espectral, y considerando solamente el efecto de fuentes puntuales de corriente hacia los estratos inferiores. Para conseguir la inversión desde el dominio espectral se requiere la resolución de integrales dobles mediante métodos numéricos.

Chow et. al. [11, 12, 13] proponen una forma aproximada para conseguir la inversión en forma directa desde el dominio espectral una vez que se consigue la solución del problema en medios estratificados. Para ello utilizan el concepto de imágenes complejas, éstas son funciones que emergen como consecuencia de aproximar la solución en el dominio espectral mediante funciones exponenciales, las cuales mediante la integral de Lipschitz se pueden invertir directamente al dominio geométrico original.

Un aspecto importante desde el punto de vista de uso y aplicación es como obtener sistemáticamente estas imágenes complejas en el dominio geométrico, sin tener que obtener las respectivas funciones en el dominio espectral. Para hacer esto se requiere desarrollar en una forma sistemática, parecida a la desarrollada en [60, 61,62], las funciones del potencial en cada estrato cuando se ubica una fuente puntual de corriente en los diferentes estratos del terreno. Posteriormente mediante la aproximación de estas soluciones mediante funciones exponenciales obtener la solución en el dominio geométrico original.

En el primer capítulo de este trabajo se presenta un resumen de la teoría clásica del potencial y una aplicación del potencial de doble capa para abordar el problema de distribución de potencial en cuerpos conductores en dominios infinitos. En el capítulo dos se aborda el problema de la distribución de potencial en dominios cuneiformes y su aplicación en la determinación de los parámetros de una línea de transmisión aérea. En el tercer capítulo se desarrolla la solución de una fuente puntual de corriente en un terreno estratificado y su aplicación en el diseño de sistemas de conexión a tierra.

CAPITULO 1

TEORÍA DE POTENCIAL

La teoría de potencial es la herramienta teórica que permite el desarrollo matemático de la solución de los problemas físicos que se pueden modelar mediante la ecuación de Laplace. Las funciones fundamentales son las denominadas funciones de Green[27], quienes representan el potencial asociado a una fuente puntual de campo. La característica importante de estas funciones de Green es que satisfacen la ecuación de Laplace y las respectivas condiciones de contorno de un problema determinado. La teoría de potencial tradicional utiliza dos fuentes asociadas a sus respectivas funciones de Green: la carga puntual y el dipolo puntual; a la primera se la asocian los denominados potenciales de capa simple y al segundo los potenciales de doble capa. La solución de los problemas de potencial se han postulado utilizando alguna de las dos formas del potencial. Mediante la aplicación del potencial de doble capa se ha determinado la distribución de potencial y la capacitancia de un cuerpo conductor cargado en el espacio libre, hecho no referenciado hasta el momento en la literatura especializada[28,48,54,57,69].

1.1 Potencial debido a una carga puntual

Para una carga puntual q el potencial a una distancia r de la misma está determinado por:

$$V(r) = \frac{q}{r} \quad (1.1)$$

Para una carga puntual ubicada en el centro de coordenadas la distancia r en un espacio tridimensional, homogéneo e infinito, es $r = [x_P^2 + y_P^2 + z_P^2]^{1/2}$. Cuando $r \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow 0$ y para $r \rightarrow 0$, $V(r) \rightarrow \infty$.

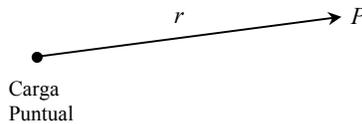


Fig. 1.1 Carga puntual en un espacio tridimensional

1.2 Potencial debido a una línea cargada de longitud infinita

En dos dimensiones basta sustituir la carga puntual de la figura 1.1 por una línea cargada de longitud infinita con una distribución lineal de carga q_L constante. En este caso el potencial a una distancia r está determinado por:

$$V(r) = -q_L \ln r \quad (1.2)$$

Para una línea infinita ubicada en el centro de coordenadas en el plano x,y y paralela al eje z , la distancia r es igual a $r = [x_P^2 + y_P^2]^{1/2}$. Obsérvese que cuando $r \rightarrow 0$ o $r \rightarrow \infty$ el valor del potencial $|V(r)| \rightarrow \infty$. Esto implica que (1.2) no representa en si la solución de un problema, fundamentalmente es la expresión matemática para abordar la solución de un problema de contorno en dos dimensiones. Una forma alterna de (1.2) es la siguiente:

$$V(r) = q_L \ln \frac{R}{r} \quad (1.3)$$

La forma (1.3) corresponde a un problema con valor de potencial cero especificado en un cilindro de radio R , coaxial con la línea cargada.

1.3 El dipolo eléctrico

Sean dos cargas puntuales en un medio dieléctrico, con carga $\pm q/\delta$ y separadas una distancia δ , ver figura 1.2. El potencial en un punto P estará determinado por la superposición de los potenciales debidos a cada carga individual:

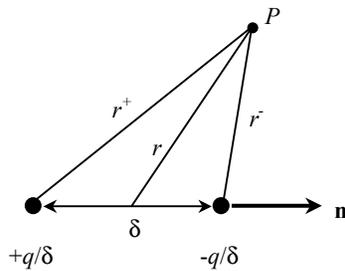


Fig. 1.2 Dipolo eléctrico

$$V(P) = \frac{q}{\delta} \left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right) \quad (1.4)$$

Utilizando el concepto de derivada, cuando $\delta \rightarrow 0$ en (1.4) se obtiene la derivada de $1/r$ en la dirección del vector unitario \mathbf{n} que se dirige desde la carga positiva a la carga negativa, es decir:

$$V(P) = q \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} \quad (1.5)$$

La derivada direccional de una función escalar se puede obtener mediante el producto escalar del gradiente de la función y un vector unitario en la dirección deseada. Para el caso de un dipolo se tiene:

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla(1/r) \quad (1.6)$$

En dos dimensiones el dipolo lo conforman dos líneas cargadas con una distribución lineal de carga $\pm q_L/\delta$. El potencial en un punto P está determinado por:

$$V(P) = -q_L \frac{\partial(\ln r)}{\partial \mathbf{n}} \quad (1.7)$$

Una propiedad importante de (1.7), es que el dipolo lineal ahora sí puede representar la solución de un problema en dos dimensiones a diferencia de la línea cargada de longitud infinita.

1.4 Potencial de capa simple

En la solución de algunos problemas encontrados en la teoría de campos electromagnéticos, en tres dimensiones, se asume que el campo se debe a una distribución superficial de carga q_s C/m². En general q_s es una función de la geometría de la superficie. El potencial en un punto P situado a una distancia r de un punto Q sobre la superficie, ver figura 1.3, estará determinado por el efecto superpuesto de todos los elementos diferenciales de carga $q_s dS$:

$$V(P) = \int_S \frac{q_s}{r} dS \quad (1.8)$$

El potencial expresado por (1.8) se conoce como potencial de capa simple, ya que se asocia al potencial generado por cargas monopoles distribuidas con una densidad q_s sobre la superficie S . La solución (1.8) tiene implícitamente incorporada la condición de contorno que $V(P) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

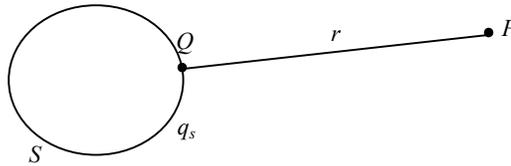


Fig. 1.3 Distribución superficial de carga q_s

Para el caso de dos dimensiones la superficie S se sustituye por un contorno C con una distribución con densidad q_L , el potencial en un punto P está determinado por:

$$V(P) = - \int_C q_L (\ln r) dL \quad (1.9)$$

Donde dL es un elemento diferencial del contorno C . La solución de la forma (1.9) requiere un contorno adicional con una condición de contorno tal, que permita obtener una solución acotada para el potencial en el dominio de interés.

1.5 Potencial de doble capa

En forma similar a los potenciales de capa simple se puede asumir la existencia de dipolos distribuidos sobre una superficie con una densidad dipolar q_D . Los dipolos pueden orientarse en cualquier dirección respecto a la superficie, para el caso de dipolos orientados perpendicularmente a la superficie como se indica en la figura 1.4, el vector normal a la superficie es paralelo al vector \mathbf{n} de orientación del dipolo.

La distribución de una densidad de carga dipolar q_D se puede interpretar como la carga inducida por una carga puntual Q en el interior y el exterior de una superficie cerrada S , perfectamente conductora y de espesor infinitesimal. Esta superficie S divide al espacio en dos regiones D^+ interior a S , y D^- exterior a S , ver figura 1.4. Por el fenómeno de inducción electrostática se induce una carga total $-Q$ distribuida con densidad superficial de carga $-q_i$ en la cara interna de S . A su vez como consecuencia de esta carga inducida aparece en la cara externa de S una carga

total $+Q$ distribuida con densidad superficial $+q_i$. Es evidente que la carga total inducida en la cara interior de S es igual y de signo contrario a aquella inducida en su cara exterior. La acción conjunta de $-q_i$ y $+q_i$ se puede asociar como la acción una distribución superficial dipolar q_D . El potencial en un punto P estará determinado por:

$$V(P) = \int_S q_D \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (1.10)$$

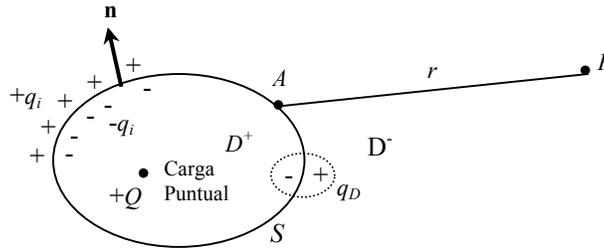


Fig.1.4 Distribución superficial de dipolos q_D

Donde S es la superficie de integración, dS un elemento diferencial de superficie. Para dos dimensiones le expresión (1.10) se modifica de la siguiente forma:

$$V(P) = \int_C q_d \frac{\partial(\ln r)}{\partial \mathbf{n}} dL \quad (1.11)$$

Donde C es el contorno de integración, dL un elemento diferencial de C , y q_d densidad de distribución lineal de dipolos.

Si q_D es constante, la integral de superficie del integrando $\partial(1/r)/\partial \mathbf{n}$ es igual al ángulo sólido correspondiente a la superficie sobre la cual se integra. En otras palabras $\partial(1/r)/\partial \mathbf{n} \cdot dS$ es igual a un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ [48,57].

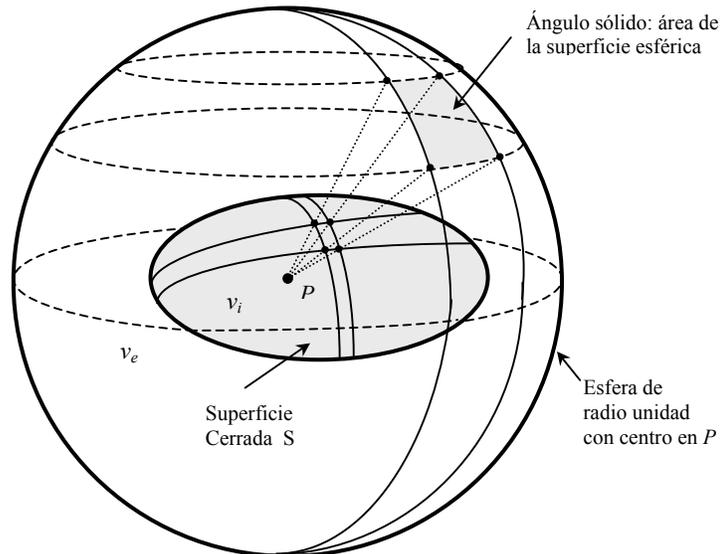


Fig. 1.5 Ángulo sólido visto desde el punto P

Si el punto P está en el interior del volumen encerrado por la superficie S , el ángulo sólido subtendido es equivalente a toda la superficie esférica de radio unidad es decir 4π . Si q_D es constante en toda una superficie cerrada de integración se tienen los siguientes resultados para puntos dentro del volumen encerrado por la superficie ($P \in v_i$), puntos sobre la superficie ($P \in S$) y puntos fuera del volumen interior ($P \in v_e$):

$$V(P) = \int_S \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_S d\Omega = \begin{cases} 4\pi & P \in v_i \\ \alpha & P \in S \\ 0 & P \in v_e \end{cases} \quad (1.12)$$

El ángulo α corresponde al ángulo sólido visto desde un punto de la superficie. Para aquellos puntos de la superficie donde existe un plano tangente a la misma $\alpha=2\pi$, que es el ángulo sólido de un plano[48]. En forma similar en dos dimensiones con distribución lineal de dipolos q_d constante se obtiene:

$$V(P) = - \int_C \frac{\partial(\ln r)}{\partial \mathbf{n}} dL = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \begin{cases} 2\pi & P \in D_i \\ \alpha & P \in C \\ 0 & P \in D_e \end{cases} \quad (1.13)$$

En este caso la integración respecto a θ corresponde al ángulo subtendido por el contorno C desde un ángulo inicial θ_1 respecto a una referencia dada hasta un ángulo θ_2 , es decir $\theta_2 - \theta_1$. El ángulo α , $\alpha \neq \pi$, corresponde a los puntos donde el contorno es discontinuo en su primera derivada. Ver figura 1.6

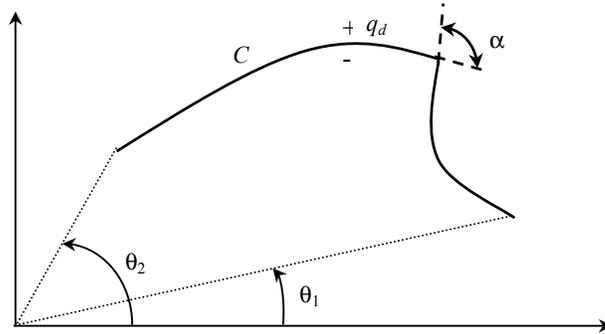


Fig. 1.6 Distribución dipolar lineal sobre un contorno

1.6 Integrales impropias

En las expresiones de potenciales generados por distribuciones de carga sobre superficies o curvas, se encuentran integrales con singularidades del tipo r^{-a} cuando $r \rightarrow 0$. En [48] se ha demostrado que este tipo de integrales son convergentes bajo ciertas condiciones, entendiéndose su valor en el sentido del valor principal de Cauchy.

Lema 1: La integral de volumen

$$I_3 = \int_{D^*} \frac{\mu(P)}{r^\gamma} dv \quad (1.14)$$

es convergente para todo P en el dominio cerrado y finito D^* cuando $\gamma < 3$. Siendo $\mu(P)$ una función integrable en D^* .

Lema 2: La integral de superficie en dos o tres dimensiones

$$I_2 = \int_{S^*} \frac{\mu(P)}{r^\beta} dS \quad (1.15)$$

es convergente para todo P en la superficie de Lyapunov S^* cuando $\beta < 2$. Siendo $\mu(P)$ una función integrable en S^* .

Lema 3: La integral sobre la curva plana C

$$I_1 = \int_C \frac{\mu(P)}{r^\alpha} dv \quad (1.16)$$

converge para todo P sobre la curva C cuando $\alpha < 1$. Siendo $\mu(P)$ una función integrable en C .

1.7 Discontinuidad del potencial de doble capa

El potencial de doble capa es discontinuo cuando se atraviesa la superficie o contorno que posee una distribución de dipolos con una densidad determinada. En la figura 1.7(a) se muestra un elemento de superficie (o de contorno) con una densidad de dipolos $q_D(P)$, $P \in S$.

Los puntos P_1 y P_2 se pueden aproximar a la superficie S por las regiones 1 y 2 respectivamente. Desde el punto de vista físico es obvio que el potencial en ambas regiones es diferente, en la medida que se acercan los puntos a la superficie van encontrando diferentes potenciales debido a que la carga del dipolo es diferente a cada cara de la superficie. Esto se traduce en una discontinuidad en el potencial de doble capa cuando se pasa de la región 1 a la región 2. Si la separación δ entre las cargas de la distribución de dipolos fuera muy pequeña pero diferente de cero, la distribución de potencial se presentaría como se muestra en la figura 1.7 (b); sobre S el potencial se anula y la transición del potencial de un región a otra se haría continuamente [36,45]. En el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ el potencial es discontinuo cuando pasa de la región 1 a la región 2.

Sea la región 1 una región interior a una superficie cerrada S en tres dimensiones, y la región 2 la región exterior a S . Sea $q_D(P)$ con una función distribución dipolar sobre la superficie S , integrable sobre $S \forall P \in S$. Si $V(P_1)$ es el potencial en un punto P_1 en la región 1, $V(P_2)$ es el potencial en un punto P_2 en la región 2 y $V(P_o)$ es el potencial en un punto P_o sobre la superficie S de separación de las dos regiones; entonces se cumplen las siguientes relaciones en un espacio tridimensional [48,57]:

$$V_1(P_o) = V(P_o) + 2\pi q_D(P_o) \quad (1.17)$$

$$V_2(P_o) = V(P_o) - 2\pi q_D(P_o) \quad (1.18)$$

Donde $V_1(P_o)$ es el valor límite del potencial obtenido cuando $P_1 \rightarrow P_o$ desde la región 1, y $V_2(P_o)$ es el valor límite del potencial obtenido cuando $P_2 \rightarrow P_o$ desde la región 2. Restando (1.17) menos (1.18) se obtiene:

$$V_1(P_o) - V_2(P_o) = 4\pi q_D(P_o) \quad (1.19)$$

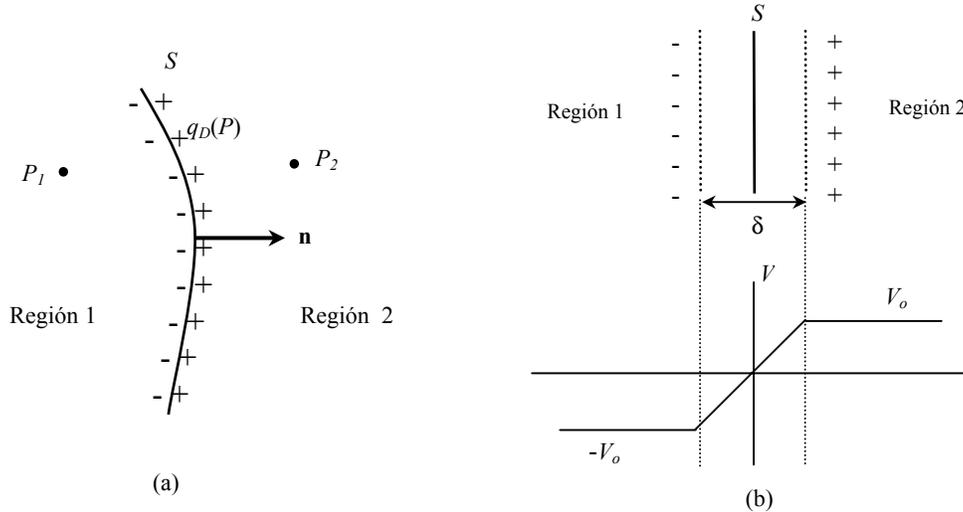


Fig. 1.7 Discontinuidad del potencial de doble capa

1.8 Solución en forma integral del problema de Dirichlet

En tres dimensiones el problema de Dirichlet se puede formular para un dominio interior D^+ a una superficie cerrada S , o para el dominio D^- exterior a la superficie, ver figura 1.8. Se tomará como convención que el vector normal \mathbf{n} siempre está dirigido fuera del dominio de interés. En la figura 1.8 la normal tiene la dirección correspondiente al problema interior de Dirichlet.

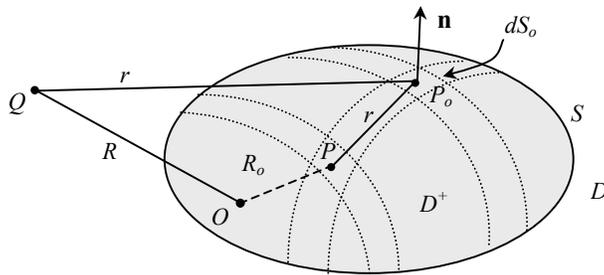


Fig. 1.8 Dominios para los problemas de Dirichlet: interior y exterior

Problema interior de Dirichlet

Determinar una función armónica $V(P)$ en D^+ que satisfaga la condición de contorno sobre S :

$$V(P) = V_o(P) \quad \forall P \in S \quad (1.20)$$

La solución de este problema se puede postular en forma integral mediante un potencial de doble capa. Utilizando (1.17) y (1.10) se obtiene la siguiente ecuación integral para la distribución dipolar sobre la superficie S , $q_D(P)$, $P \in S$:

$$\int_S q_D(P_o) \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS_o + 2\pi q_D(P) = V_o(P_o) \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) es una ecuación de Fredholm de segunda clase, de acuerdo a la teoría de ecuaciones integrales[48,57] siempre tiene una solución única. Resolviendo (1.21) se obtiene la densidad $q_D(P)$, y mediante (2.9) se puede obtener el potencial en cualquier punto en D^+ .

Problema exterior de Dirichlet

Determinar una función armónica $V(P)$ en D^+ que satisfaga las siguientes condiciones de contorno:

$$V(P) = V_o(P) \quad \forall P \in S \quad (1.22)$$

$$V(P) = 0 \quad P \rightarrow \infty \quad (1.23)$$

La solución de este problema se puede postular en forma integral mediante un potencial de doble capa. Utilizando (1.18) y (1.10) se obtiene la siguiente ecuación integral para la distribución dipolar sobre la superficie S , $q_D(P)$, $P \in S$:

$$2\pi q_D(P) - \int_S q_D(P_o) \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS_o = V_o(P_o) \quad (1.24)$$

Sin embargo de acuerdo a la teoría de ecuaciones integrales[48,57,69] para que (1.24) tenga solución se debe cumplir:

$$\int_S V(P_o) \cdot v(P) dS = 0 \quad (1.25)$$

Donde $v(P)$ es una función propia de la ecuación homogénea adjunta:

$$2\pi v(P) + \lambda \int_S v(P_o) \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS_o = 0 \quad (1.26)$$

En (1.26) se han intercambiado los roles de P y P_o , $\lambda = -1$. La solución de la ecuación (1.26) no es trivial, cualquier valor $v(P) = \text{constante}$ es solución de (1.26). Estos valores constantes son la funciones propias de (1.26) correspondientes al valor propio $\lambda = -1$. Por otro lado cuando $r \rightarrow \infty$ el potencial de doble capa es una función que varía de acuerdo a $1/r^2$, mientras que una función armónica varía de la forma $1/r$. Entonces puede ser imposible encontrar un potencial de doble capa que sea solución del problema[57]. En[69] se propone una solución de la siguiente forma:

$$V(Q) = \int_S q_D(P_o) \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS_o + \frac{1}{R} \int_S q_D(P_o) dS_o \quad (1.27)$$

Donde R es la distancia desde el punto $Q \in D^-$ hasta el centro de coordenadas O , que se asume en D^+ , ver figura 1.8. Mediante (1.27) se obtiene la siguiente ecuación integral:

$$2\pi q_D(P) - \int_S q_D(P_o) \frac{\partial(1/r)}{\partial \mathbf{n}} dS_o + \frac{1}{R_o} \int_S q_D(P_o) dS_o = V_o(P_o) \quad (1.28)$$

Aún cuando no está demostrado, esta ecuación parece tener solución para cualquier función continua $V_o(P_o)$ [69]. Mediante la solución de (1.28) se obtiene la densidad $q_D(P)$ y mediante (1.27) se puede obtener el potencial en cualquier punto en D^- .

1.9 Potencial y Capacitancia de Cuerpos Conductores en el Espacio Libre

Un cuerpo perfectamente conductor elevado a un potencial V_0 respecto a una referencia en el infinito e invariable en el tiempo, es una fuente de campo electrostático. La superficie del conductor es en sí misma una superficie equipotencial. Determinar la distribución del potencial en el espacio exterior comprendido entre la superficie del cuerpo y una esfera ficticia de radio infinito, es un problema de contorno conocido como problema exterior de Dirichlet. La solución de éste problema consiste en determinar una función armónica $V(P)$ que satisfaga las condiciones de contorno (1.22) sobre la superficie del cuerpo, y que se anule a una distancia infinita del cuerpo conductor, condición (1.23).

Tradicionalmente la solución de este problema se ha obtenido asumiendo que sobre la superficie S se distribuye una carga eléctrica monopolar, con una densidad superficial de carga $\sigma_m(P)$, $P \in S$, que es capaz de satisfacer las condiciones de contorno requeridas. Esta forma de resolver el problema conduce a la siguiente ecuación integral de tipo Fredholm de primera especie:

$$V_0 = \int_S \frac{\sigma_m(M)}{r} dS \quad M \in S \quad (1.29)$$

r : distancia entre un punto M en el elemento dS y un punto P sobre S .

El potencial asociado a la ecuación (1.29) es un potencial de simple capa. Históricamente la ecuación (1.29) se ha utilizado para obtener soluciones analíticas del problema exterior de Dirichlet para geometrías muy especiales: esferas, esferoides, cilindros etc. Con el advenimiento de los computadores se han obtenido soluciones aproximadas mediante técnicas numéricas para otras geometrías como cilindros de longitud finita [10,24,55,85] y cubos [50]. Sin embargo en la teoría de las ecuaciones integrales las ecuaciones integrales de primera especie no han sido tan estudiadas como las ecuaciones de segunda especie. Se conoce que el tipo de la ecuación (1.29) puede causar problemas cuando se pretende obtener una solución teórica o aproximada, llegándose incluso al caso de obtener una solución aproximada a problemas que no tienen una solución verdadera [3]. Para evitar la solución mediante ecuaciones integrales de primera especie, la solución del problema exterior e interior de Dirichlet se ha propuesto mediante potenciales de doble capa. La aplicación del potencial de doble capa conduce a una ecuación integral de Fredholm de segunda especie, que a diferencia de las ecuaciones de primera especie, tienen un mejor comportamiento en cuanto a la búsqueda de soluciones teóricas o aproximadas. Esta forma de solución ha sido ampliamente difundida en la literatura especializada, sin embargo no se ha

podido encontrar referencia alguna sobre su aplicación en la solución de un problema específico [28,48,54,57,69]. Aquí se presenta la solución aproximada de la ecuación integral originada mediante el uso de potenciales de doble capa, y su aplicación a la solución del problema exterior de Dirichlet para un elipsoide de revolución. La solución analítica de este problema se ha deducido con potenciales de simple capa [22], por consiguiente es posible establecer comparaciones entre los resultados obtenidos mediante expresiones analíticas y aquellos obtenidos mediante la solución aproximada.

Como se mencionó anteriormente, para el problema exterior de Dirichlet se busca la solución mediante un potencial de doble capa:

$$V(P) = \int_S \sigma(M) \cdot \frac{\partial 1/r}{\partial \mathbf{n}} \quad (1.30)$$

$\sigma(M)$: densidad de dipolos orientados en la dirección normal a S

Con el potencial de doble capa (1.30) se obtiene la ecuación integral de Fredholm de segunda especie (1.27), para la función desconocida $\sigma(M)$ [69]:

$$2\pi\sigma(P) + \int_S \sigma(M) \cdot \frac{\partial 1/r}{\partial \mathbf{n}} dS + \frac{1}{R} \int_S \sigma(M) dS = V(P) \quad P \in S \quad (1.31)$$

El factor asociado a $1/R$ puede interpretarse como el efecto de un potencial de simple capa asociado a la densidad $\sigma(M)$.

Solución aproximada de la ecuación integral originada por el potencial de doble capa

Para una superficie de suave la ecuación (1.31) puede resolverse en forma aproximada, si se discretiza la superficie S en N elementos ΔS_i [8]. Si se asume que en cada elemento ΔS_i la función $\sigma(P)$ toma un valor constante σ_i , aplicando el método de los momentos se puede obtener un sistema lineal de ecuaciones $N \times N$ [30]. La solución de este sistema de ecuaciones da como resultado las N distribuciones σ_i asociadas a los N elementos ΔS_i . Para la aplicación del método de los momentos se utilizó la técnica de colocación de puntos [8,30].

En el caso del elipsoide de revolución, aprovechando la simetría axial de este sólido se utilizaron elementos ΔS_m ($m=1,2,\dots,N$), de una superficie de revolución con coordenada z_m comprendida en el intervalo $z_m-h \leq z_m \leq z_m+h$, $z_m = z_{m-1} + 2h$ y $h = L/N$; donde L es el semi eje mayor del elipsoide, ver figura 1.9 La solución aproximada de (1.31) se puede escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{V} \quad (1.32)$$

$\boldsymbol{\sigma}$: vector unidimensional $1 \times N$ de las incógnitas σ_m

\mathbf{V} : vector unidimensional $1 \times N$ de los valores V_m conocidos en cada elemento ΔS_m

\mathbf{K} : matriz cuadrada $N \times N$ con elementos K_{pm} determinados por:

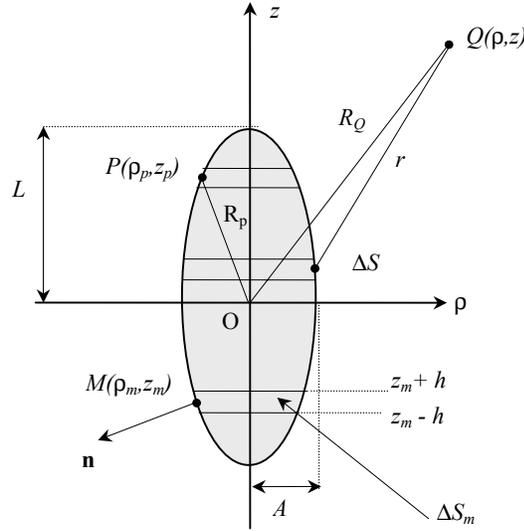


Fig. 1.9 Elipsoide de revoluci3n

Donde:

$$K_{pm} = \int_{\Delta S_m} \frac{\partial 1/r}{\partial \bar{n}} dS + \frac{1}{R_p} \int_{\Delta S_m} dS \quad p \neq m \quad (1.33)$$

$$K_{mm} = 2\pi + \int_{\Delta S_m} \frac{\partial 1/r}{\partial \bar{n}} dS + \frac{1}{R_m} \int_{\Delta S_m} dS \quad (1.34)$$

Para el caso de un elipsoide de semi eje mayor L y semi eje menor A :

$$\int_{\Delta S_m} dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_m-h}^{z_m+h} \frac{A}{L^2} \left\{ (A^2 - L^2)z^2 + L^4 \right\}^{1/2} dz \quad (1.35)$$

$$\int_{\Delta S_m} \frac{\partial 1/r}{\partial \bar{n}} dS = 2 \cdot \int_{-h}^h d\zeta \int_0^\pi \frac{a \cdot \text{Cos}\psi + b}{\{c - 2 \cdot a \cdot \text{Cos}\psi\}^{3/2}} d\psi \quad (1.36)$$

donde:

$$a = \rho_p \cdot \rho_m \quad (1.37)$$

$$b = \frac{A^2 z_p}{L^2} (\zeta + z_m) - A^2 \quad (1.38)$$

$$c = \rho_p^2 + \rho_m^2 + (z_p - z_m - \zeta)^2 \quad (1.39)$$

$$\rho_m = A \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta + z_m}{L} \right)^2 \right\}^{1/2} ; z_m = 2.h \left(m - \frac{1}{2} \right) - L \quad (1.40)$$

$$\rho_p = A \left\{ 1 - \left(\frac{z_p}{L} \right)^2 \right\}^{1/2} ; z_p = 2.h \left(p - \frac{1}{2} \right) - L \quad (1.41)$$

Para la identificación de las variables indicadas en la expresiones anteriores ver la figura 1.9. Cuando $p=m$, la integral de superficie relacionada con $\partial(1/r)/\partial\mathbf{n}$ se vuelve impropia por la singularidad que se presenta cuando $r \rightarrow 0$. En este caso la integral tiende a cualquier valor entre -2π y 2π incluyendo el valor cero, para la solución del problema se debe tomar el valor cero. Una vez que se conocen los valores σ_m , entonces el potencial en un punto $Q = (\rho, z)$ se determina mediante la expresión:

$$V(Q) = \sum_{m=1}^N K_{Qm} \cdot \sigma_m \quad (1.42)$$

donde:

$$K_{Qpm} = \int_{\Delta S_m} \frac{\partial(1/r)}{\partial\bar{n}} dS + \frac{1}{R_Q} \int_{\Delta S_m} dS \quad (1.43)$$

Elipsoide de revolución, solución analítica mediante potencial de simple capa

La ecuación de un elipsoide de revolución alrededor del eje z es la siguiente:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{L^2} = 1 \quad (1.44)$$

Donde L es el semi eje mayor y A el semi eje menor, ver figura 1.9. Los focos del elipsoide están ubicados sobre el eje z , a una distancia $C = \{ L^2 - A^2 \}^{1/2}$ del centro de coordenadas. Aprovechando la simetría axial podemos utilizar la variable $\rho = \{ x^2 + y^2 \}^{1/2}$ para expresar el potencial en un punto Q mediante la expresión siguiente [22]:

$$V(Q) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{L+C}{L-C}\right)} \ln\left\{ \frac{\rho_1 + \rho_2 + 2C}{\rho_1 + \rho_2 - 2C} \right\} \quad (1.45)$$

donde:

$$\rho_1 = \left\{ \rho^2 + (z - C)^2 \right\}^{1/2} ; \rho_2 = \left\{ \rho^2 + (z + C)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.46)$$

V_0 es el potencial del elipsoide respecto al infinito. La capacitancia esta obtiene mediante la siguiente expresión [22]:

$$C_e = \frac{8\pi\epsilon C}{\ln\left(\frac{L+C}{L-C}\right)} \quad (1.47)$$

La densidad superficial de carga asociada al potencial de simple capa asumido para la deducción de las expresiones anteriores, tiene la siguiente expresión [22]:

$$\sigma_m = \frac{C_e \cdot V_0}{4\pi \cdot L \cdot A^2} \left\{ \frac{\rho^2}{A^4} + \frac{z^2}{L^4} \right\}^{-1/2} \quad (1.48)$$

Comparación de resultados obtenidos con potencial de doble capa y de capa simple

A continuación se muestran los resultados obtenidos mediante las expresiones analíticas obtenidas con el potencial de simple capa, y los obtenidos mediante la solución aproximada de la ecuación (1.31). Se comparan los valores de capacitancia y distribución del potencial en las direcciones de los ejes ρ y z , finalmente se comparan las distribuciones superficiales de carga obtenidas por las dos formas. Para la resolución de (1.31) se dividió el elipsoide en $N=50$ elementos de superficie de revolución. El potencial V_0 del elipsoide se asumió igual a 1 V. En la tabla 1.1 se resumen los valores de capacitancia obtenidos para diferentes relaciones L/A , el error se expresa en porcentaje de los valores obtenidos mediante (1.47). Para obtener Farads se deben multiplicar los valores de la tabla por $4\pi\epsilon$.

Tabla 1.1 : Valores de capacitancia

L/A	Ec. (1.47)	Ec. (1.42)	Dif %
2	1,315191	1,315158	-0,02
5	2,137023	2,142160	-0,24
10	3,324134	3,375486	-1,55

En las tablas 1.2 y 1.3 se muestra la variación del potencial en la dirección del eje ρ ($z = 0$), y en la dirección z ($\rho = 0$). Los cálculos se hicieron sobre la misma superficie equipotencial homofocal con el elipsoide. En consecuencia los valores obtenidos con (1.45) son los mismos en la dirección ρ ($z = 0$), o en la dirección z ($\rho = 0$). Los valores ρ y z están relacionados mediante (1.46).

Tabla 1.2 : Valores calculados de potencial en la dirección ρ y en la dirección z para $L/A=10$

ρ ($z=0$)	z ($\rho=0$)	Ec. (1.45)	Ec. (1.42)	
		Dirección ρ o z	Dirección ρ	Dirección z
1,10	10,0149	0,968334	1,00550	0,86533
1,50	10,0623	0,865581	0,87086	0,82178
2,00	10,1488	0,770912	0,77402	0,76297
3,00	10,3923	0,639473	0,64259	0,65269
4,00	10,7238	0,548762	0,55233	0,56379
5,00	11,1355	0,480800	0,48464	0,49418
6,00	11,6189	0,427462	0,43139	0,43889
8,00	12,7671	0,348679	0,35250	0,35706
10,00	14,1067	0,293271	0,29683	0,29970

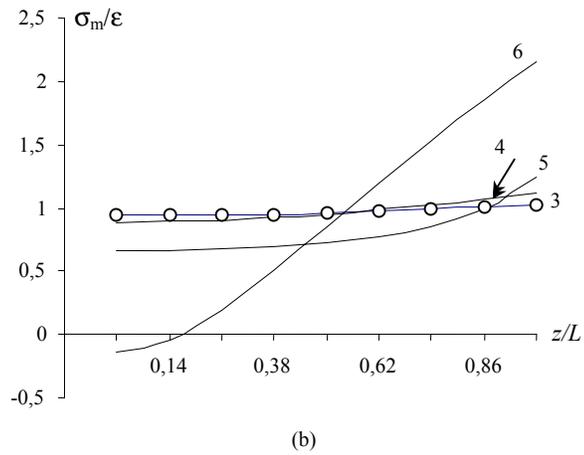
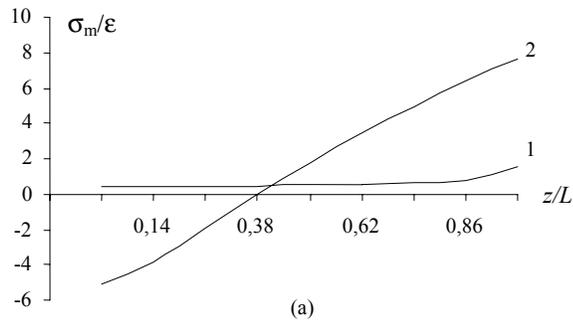
Tabla 3.3 : Valores calculados de potencial en la dirección ρ y en la dirección z para $L/A=5$

		Ec. (1.45)	Ec. (1.42)	
ρ ($z=0$)	z ($\rho=0$)	Dirección ρ o z	Dirección ρ	Dirección z
1,10	5,02096	0,979652	0,96310	0,90102
1,25	5,05594	0,905119	0,90721	0,86596
1,50	5,12348	0,828536	0,83015	0,80839
2,00	5,29150	0,710300	0,71158	0,70495
2,50	5,50000	0,621793	0,62295	0,62064
3,00	5,74456	0,552401	0,55347	0,55260
4,00	6,32456	0,450054	0,45099	0,45089
5,00	7,00000	0,378207	0,37903	0,37907

Como se observa, los resultados obtenidos por ambos procedimientos tienden a coincidir en la medida que nos alejamos del elipsoide. Con $N=50$, para relaciones $L/A < 10$ la diferencia disminuye. Para relaciones L/A mayores se puede mejorar la aproximación de los resultados, si se incrementa el número de subdivisiones de la superficie. Una alternativa a considerar, es asumir una representación lineal o cuadrática de la función σ_m en los elementos de superficie ΔS_m , obviamente esto involucra un esfuerzo de programación y de cálculo adicional [8]. Los valores calculados mediante (1.42) deberían ser iguales en las dos direcciones, ya que son puntos sobre la misma superficie equipotencial. Por otro lado se observa que la diferencia entre los valores calculados mediante las dos formas es mayor en la dirección z . Esto se debe a que en esa dirección la superficie del elipsoide presenta su mayor curvatura. En esta zona el gradiente de potencial es máximo, lo que requiere una mejor aproximación de la función σ_m mediante alguna de las alternativas mencionadas anteriormente.

En la figura 1.10 se muestran las distribuciones de carga obtenidas para diferentes relaciones L/A , como referencia se acompaña cada una con la correspondiente a la expresión (1.48). Los valores de la densidad de carga σ_m están divididos por el factor ϵ . La distribución de carga correspondiente al potencial de simple capa se manifiesta con un incremento de la densidad superficial de carga hacia las zonas de mayor curvatura de la superficie. Para el potencial de doble capa la distribución de carga obtenida con la solución aproximada de (1.32) presenta un cambio de polaridad en la zona ecuatorial del elipsoide. Este fenómeno se observa a partir de cierto valor de la relación L/A . Para L/A próximo a la unidad la distribución de carga es de una sola polaridad y tiende al valor 1 asociado a la esfera de radio 1. En general la distribución de carga asociada a (1.32) presenta un máximo positivo que coincide con la zona de mayor curvatura, y un mínimo que puede ser negativo dependiendo de la relación L/A .

Es evidente que la distribución de carga asociada a una condición de contorno depende de la ecuación integral que se utilice para formular una solución del problema. En este caso la formulación mediante las ecuaciones (1.48) y (1.31) dan resultados diferentes para la distribución de carga sobre la superficie; pero ambas soluciones coinciden en los resultados obtenidos para la distribución de potencial y capacitancia asociados al elipsoide.



(a) $L/A = 5$

(b) Curvas 3 y 4: $L/A = 1,1$; Curvas 5 y 6: $L/A = 2.0$
 Curvas 1,3,5 : Densidad de carga de simple capa
 Curvas 2,4,6 : Densidad de carga de doble capa

Fig. 1.10 Distribución superficial de la densidad de carga σ_m , dividida por la constante dieléctrica ϵ (σ_m/ϵ)

CAPITULO 2

POTENCIAL EN DOMINIOS CUNEIFORMES

La solución de problemas de contorno requiere del modelo geométrico de los contornos del problema específico. En la práctica es inevitable, en algunos casos, la presencia de contornos asociados a bordes en forma de cuña; lo lógico entonces es asumir un modelo geométrico que incluya una cuña ideal que represente el borde o bordes. El problema asociado a las cuñas es que en el vértice de las mismas no existe continuidad en la derivada normal, quedando ésta derivada indefinida para el punto del vértice, sin embargo las condición de contorno debe garantizarse en todos los puntos del contorno incluido el vértice. En éste capítulo se estudia la función de Green que garantiza el cumplimiento de las condiciones de contorno de primer género o de segundo género para un dominio cuneiforme. Esta función de Green se utiliza para obtener la distribución de voltaje en aquellos casos no cubiertos por la teoría de imágenes y para obtener los parámetros de líneas aéreas de transmisión y distribución de energía eléctrica a 60 Hz en terrenos no planos.

2.1 Problema de contorno en un dominio cuneiforme

Sea una fuente puntual Q o una fuente lineal q de un campo vectorial estacionario, como por ejemplo una carga eléctrica o una fuente de corriente, ubicada en un dominio cuneiforme con una cuña de longitud infinita, tal como se muestra en la Fig. 2.1. En la frontera del dominio acotado por la cuña, $\varphi = \pm\Phi$, se tienen dos planos conductores con voltajes de referencia $V=0$ o con $\partial V/\partial\varphi=0$. Se desea conocer el potencial V_P en un punto P de coordenadas (r, φ) .

La formulación en términos matemáticos del problema descrito, corresponde a un problema de contorno asociado a la ecuación de Laplace con una singularidad en el punto de ubicación de la fuente puntual Q o lineal q , punto (r_o, φ_o) . Es decir se desea resolver el siguiente problema:

$$\nabla^2 V = \frac{\delta(r-r_o) \cdot \delta(\varphi-\varphi_o)}{r} \quad (2.1)$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$V < \infty \quad r=0 \quad -\Phi \leq \varphi \leq \Phi \quad (2.2)$$

$$V = 0 \quad r \rightarrow \infty \quad -\Phi \leq \varphi \leq \Phi \quad (2.3)$$

$$V = 0 \text{ ó } \partial V / \partial \varphi = 0 \quad 0 \leq r \leq \infty \text{ y } \varphi = \pm\Phi \quad (2.4)$$

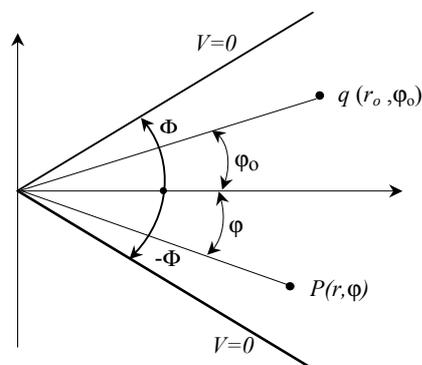


Fig. 2.1 Fuente de campo q en un dominio cuneiforme

2.2 Solución mediante la teoría de imágenes

La teoría de las imágenes, descrita profusamente en la literatura [26,36,37,38,43], resuelve el problema colocando cargas imágenes en el exterior del dominio con los signos adecuados para satisfacer las condiciones de contorno nulas en la frontera del dominio. En la Fig. 2.2(a) se ilustra el caso para $\Phi = \pm \pi/4$. El potencial en un punto se determina mediante la superposición de los potenciales individuales asociados a la fuente de campo q o carga y sus respectivas imágenes:

$$V_p = \sum_{i=1}^I \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} F(R_i) \quad (2.5)$$

$$q_i = \pm q$$

I : número total de cargas o fuentes

$F(R_i)$: Función de la distancia R_i . Para una fuente puntual en tres dimensiones $1/R_i$, para una fuente lineal en dos dimensiones, con invarianza a lo largo de una dimensión, $\ln(1/R_i)$

R_i : Distancia desde el punto de interés P a cada una de las fuentes

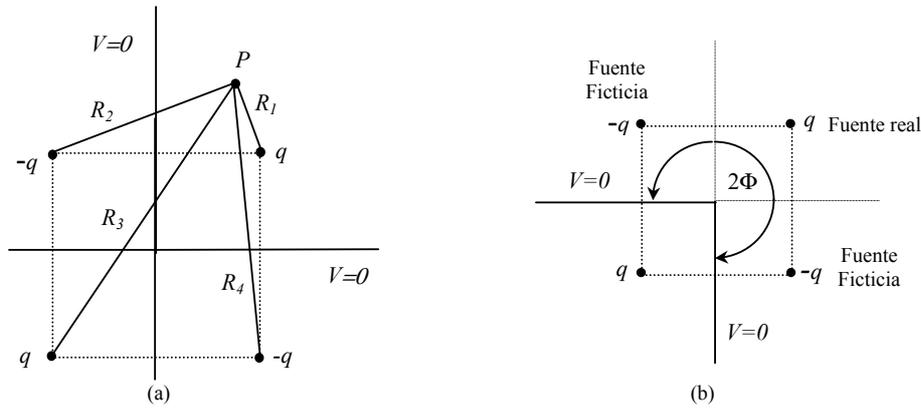


Fig. 2.2 (a) Imágenes para $2\Phi = \pi/4$
(b) Imágenes para $2\Phi = 3\pi/4$

La teoría de las imágenes está limitada a valores de $2\Phi = \pi/k$ para k entero y valores $\Phi \leq \pi/2$. Si k es irracional la sumatoria en (2.5) es infinita, ya que el número de imágenes se hace infinito. Para $2\Phi > \pi$ la teoría de imágenes crea fuentes adicionales ficticias en el dominio de interés $-\Phi \leq \phi \leq \Phi$, que transforman el problema original en otro totalmente diferente. Ver figura 2.2(b).

2.3 Solución mediante series infinitas

En dos dimensiones, para una distribución lineal y constante fuentes q , Panofsky y Phillips [47] desarrollaron la solución en forma de serie infinita para la condición de contorno (2.4) $V=0$:

$$V = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (w)^{j/b} \text{Sen}\left(\frac{j\beta}{b}\right) \cdot \text{Sen}\left(\frac{j\theta}{b}\right) \quad (2.6)$$

Donde:

$$w = \begin{cases} r/r_o & \text{si } r_o > r \\ r_o/r & \text{si } r > r_o \end{cases} \quad (2.7)$$

$$b = 2\Phi/\pi ; \beta = \varphi_o + \Phi ; \theta = \Phi - \varphi \quad (2.8)$$

La solución expresada mediante (2.6) es válida para k racional en $2\Phi = \pi/k$, para k irracional numéricamente es coherente con los valores obtenidos mediante la solución integral que se describe a continuación. La velocidad de convergencia de la serie infinita depende del factor w . Para valores de w próximos a la unidad la serie converge lentamente. Para el caso de la singularidad $w = 1$ y $\varphi = \varphi_o$, la serie diverge lentamente a ∞ .

2.4 Solución mediante la integral de Sommerfeld – Malyughinetz

La solución del problema de contorno planteado en (2.1) – (2.4), puede ser postulada como una función integral expresada de la siguiente forma [49]:

$$V(r, \varphi, r_o, \varphi_o) = \frac{c}{2\pi j} \int_{\gamma} K(r, r_o, \alpha) H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) d\alpha \quad (2.9)$$

Donde c es una constante a determinar, y γ es un camino de integración en el plano complejo α . El núcleo $K(r, r_o, \alpha)$ satisface la ecuación de Laplace (2.1). El núcleo K y el camino de integración γ deben escogerse adecuadamente para satisfacer la condición $V \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. Para (2.1) el núcleo K es $1/R$ para una carga puntual en tres dimensiones, o la función $\ln(R)$ para una distribución lineal de carga en dos dimensiones, donde $R^2 = r^2 + r_o^2 - 2r \cdot r_o \cos(\alpha) + (z - z_o)^2$. La función $H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi)$ se obtiene haciendo que la solución propuesta (2.9) satisfaga las condiciones de contorno (2.2)-(2.4), esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones funcionales:

$$H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) \pm H(-\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) = 0 \quad (2.10)$$

$$H(\alpha, -\varphi, \varphi_o, \Phi) \pm H(-\alpha, -\varphi, \varphi_o, \Phi) = 0 \quad (2.11)$$

El signo positivo de (2.10) a (2.12) corresponde a las condiciones de contorno de segundo género $\partial V / \partial \varphi = 0$. El signo negativo para las condiciones de primer género, $V = 0$, en la frontera del dominio. La solución de este sistema fue determinada por Tuzhilin[63]

$$H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) = \frac{\pi}{4\Phi} \{Ctg(\zeta_1) \pm Ctg(\zeta_2)\} \quad (2.12)$$

$$\text{Donde: } \zeta_1 = \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \varphi - \varphi_o) ; \zeta_2 = \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \varphi + \varphi_o - 2\Phi)$$

Si en (2.1) se sustituye el operador de Laplace por el operador $(\nabla^2 + \mu^2)$, se obtiene el problema de Helmholtz con idénticas condiciones de contorno. La solución de este último problema en dos dimensiones se puede postular de idéntica forma, pero el núcleo será la función modificada de Bessel de segunda clase y orden cero $K_o(\mu R)$, entonces la solución para el problema de Helmholtz se puede escribir como:

$$V_H = c \int_{\gamma} K_o(\mu R) [Ctg(\zeta_1) - Ctg(\zeta_2)] d\alpha \quad (2.13)$$

El parámetro μ es en general un valor complejo. Es interesante ver que ocurre cuando el parámetro μ se hace muy pequeño. En el límite $\mu \rightarrow 0$, el operador de Helmholtz se transforma en el operador de Laplace. Para valores pequeños del argumento (μR) la función de Bessel puede ser aproximada mediante la función logarítmica [1,67]:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K_o(\mu R) \approx \ln(\mu R) \quad (2.14)$$

Para μ constante, la aproximación (2.14) satisface la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, tomando como centro de coordenadas el punto (r_o, φ_o) . La solución del problema con el operador de Laplace puede considerarse entonces, como un caso particular de la solución del problema con el operador de Helmholtz. Para tres dimensiones la ecuación de Helmholtz tiene como solución $\exp(-j\mu R)/R$, es obvio que cuando $\mu \rightarrow 0$, la solución es simplemente $1/R$.

En la solución (2.9) la elección del contorno de integración γ , en el plano α juega un papel fundamental. Las funciones $1/R$, $\ln(R)$, $K_o(\mu R)$ y $\exp(-j\mu R)/R$ son singulares cuando $R \rightarrow 0$. En el apéndice B se demuestra que esto ocurre para los puntos:

$$\alpha = 2N\pi + jy \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.15)$$

$$Ch(y) = \frac{(r^2 + r_o^2)}{2.r.r_o} \quad (2.16)$$

La constante c en (2.13) es un valor escalar a determinar. Esta constante es independiente de la operación de integración en el contorno γ .

Contorno de integración

La función $1/R$, y por ende $\ln(R)$, es multivaluada en el plano complejo α con polos en los puntos correspondientes a (2.15) y (2.16). Haciendo los cortes mostrados en la figura 2.3, se evitan los múltiples valores, éstas funciones pasan a ser funciones monovaluadas en el plano cortado. La función $[Ctg(\zeta_1) - Ctg(\zeta_2)]$ es una función meromorfa en el plano α con polos en el eje real ubicados periódicamente en los puntos:

$$\alpha = 4m\Phi + \varphi - \varphi_o \quad ; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

$$\alpha = 2(2n+1)\Phi - \varphi - \varphi_o \quad ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.18)$$

El contorno de integración γ está formado por dos contornos γ_1, γ_2 como se indica en la figura 2.3(a). El camino de integración γ no puede cortar ninguna rama o polo del integrando $K(r, r_o, \alpha)H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi)$. El camino γ_1 viene desde $(p, \text{Im}(\alpha) \rightarrow +\infty)$ y va hasta $(-p, \text{Im}(\alpha) \rightarrow +\infty)$ en el sentido indicado en la figura 2.3(a), y corta el eje imaginario en algún punto arbitrario jy_c entre $\zeta=0$, y el polo de la rama de $K(r, r_o, \alpha)$ sobre el semieje imaginario positivo. El camino γ_2 viene desde $(-p, \text{Im}(\alpha) \rightarrow +\infty)$ y va hasta $(p, \text{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty)$ en el sentido indicado en la figura 2.3(a), y corta el eje imaginario en el punto $-jy_c$, entre $\zeta=0$ y el polo de la rama de $K(r, r_o, \alpha)$ sobre el semieje

imaginario negativo. Estos contornos son simétricos respecto al eje ζ [49]. En la figura 2.3(b) el valor y_c se hace nulo, con lo cual la integración en los caminos horizontales entre p y $-p$ se anula, salvo que existan uno o más polos de la función $H(\alpha, \varphi, \varphi_0, \Phi)$ ubicados entre $-p$ y p .

Integración numérica en el contorno γ

La integración numérica sobre del contorno γ se puede descomponer en seis integrales que varían bien a lo largo de $-p \leq \zeta \leq p$ o de la variable $\pm y_c \leq y \leq \pm \infty$. Si se descomponen cada una de las seis integrales en su partes reales e imaginarias, se obtienen doce integrales reales que pueden ser determinadas mediante algoritmos en álgebra real. Es posible explotar la simetría de las funciones pares y la cancelación que ocurre con las funciones impares. La selección de los puntos p y $-p$ a lo largo del eje real puede simplificar las expresiones de los integrandos. La integración a lo largo de las líneas verticales desde $\pm y_c$ hasta $\pm \infty$ se puede limitar a un valor finito $\pm Y$, debido a que el integrando decrece rápidamente a cero con el incremento de y .

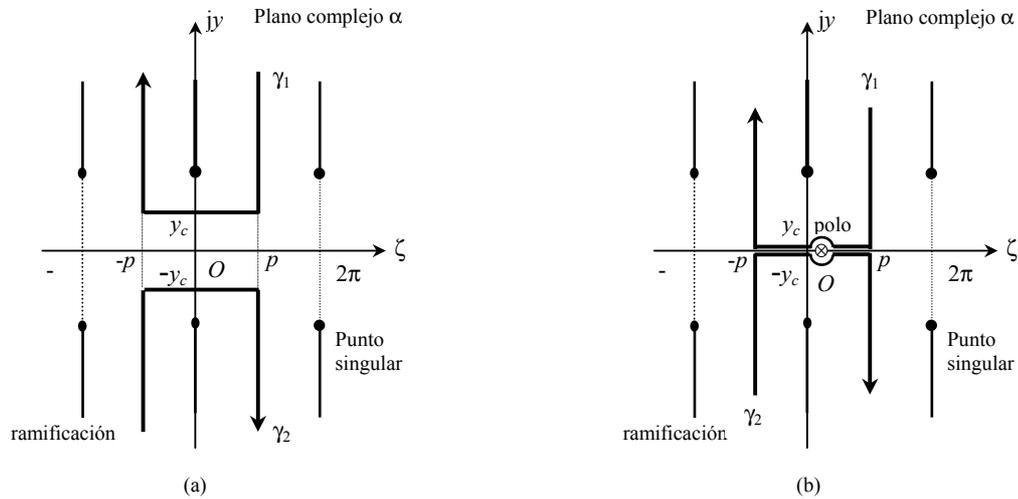


Fig. 2.3 Plano cortado $\alpha = \zeta + jy$

2.5 El método de las imágenes como un caso particular de la solución integral

Para k entero, en $2\Phi = \pi/k$, mediante la aplicación de la teoría de residuos se puede obtener la solución analítica de la integral (2.9). Esta solución coincide con la obtenida mediante la aplicación de la teoría de las imágenes. En efecto, mediante la transformación $u = \exp(j\alpha)$, y (2.12), ver apéndice B, en tres dimensiones se obtiene la siguiente expresión para (2.9):

$$V = \frac{c}{4j\Phi} \left(\frac{u_o - u_o^{-1}}{u_\varphi} \right) \int_L \frac{u^{k-1} K(R) du}{(u^k - u_o / u_\varphi) \{ u^k - (u_o u_\varphi)^{-1} \}} \quad (2.19)$$

Donde:

$$R = \left[r^2 + r_o^2 - r.r_o \left(u + u^{-1} \right) + (z - z_o)^2 \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

$$k = \frac{\pi}{2\Phi} \quad (2.21)$$

$$u_o = e^{jk(\Phi-\varphi_o)} \quad (2.22)$$

$$u_\varphi = e^{jk(\varphi-\Phi)} \quad (2.23)$$

L es un contorno en el plano u equivalente al contorno γ en el plano α . La integración en (2.19) se puede efectuar mediante la aplicación directa de la teoría de residuos, previa determinación de las raíces del denominador. Por ejemplo para $2\Phi=\pi/2$, $k=2$, las raíces del denominador son:

Tabla 2.1 Raíces para $k=2$

$u_1 = e^{j(2\Phi-\varphi-\varphi_o)}$	$u_2 = e^{j(\pi+2\Phi-\varphi-\varphi_o)}$	$u_3 = e^{j(\varphi_o-\varphi)}$	$u_4 = e^{j(\pi-\varphi+\varphi_o)}$
--	--	----------------------------------	--------------------------------------

Comparando con (2.17) y (2.18), es evidente que corresponden a las mismas raíces. Sustituyendo las raíces en (2.19) de acuerdo a la teoría de los residuos se obtiene:

$$V = \frac{c\pi}{2\Phi} \left(\frac{u_o^{-1} - u_o}{u_\varphi} \right) \sum_{i=1}^4 \frac{u_i \cdot K(R)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (u_i - u_j)} \quad (2.24)$$

Después algunas simplificaciones algebraicas, ver apéndice B, el resultado coincide completamente con el obtenido por el método de las imágenes. El valor de la constante c es $q/(2\pi\epsilon)$ para una carga lineal en C/m en un espacio dos dimensiones, y $Q/(4\pi\epsilon)$ para una carga puntual en un espacio tridimensional. Para dos dimensiones se elimina el factor $(z-z_o)^2$ en (2.20)

2.6 Espectro discreto y espectro continuo

El resultado obtenido en el numeral anterior, mediante la teoría de residuos, merece algunas observaciones adicionales. Si los contornos γ_1, γ_2 se llevan hasta el eje real ζ , $y_c=0$, la integración en los caminos horizontales entre p y $-p$ se anula, salvo que existan una o más raíces de la función $H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi)$ ubicadas entre $-p$ y p . Los contornos de integración de la figura 2.3(a) cambian a los dos caminos de integración γ_1, γ_2 de la figura 2.3 (b). Estos nuevos caminos verticales cortan al eje real en los puntos $-p$ y p y se extienden infinitamente en ambos sentidos en la dirección vertical. Las polos de $H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi)$ entre $-p$ y p , constituyen parte del espectro discreto, las integrales a lo largo de los caminos verticales de la figura 2.3(b) conforman el espectro continuo mas lo que pueda restar del espectro discreto, ya que el valor de p puede ser tal que incluya todo el espectro discreto parte de éste. Si no existen raíces entre $-p$ y p , las integrales representan la totalidad del espectro: discreto y continuo. En el caso particular de la teoría de imágenes, éstas corresponden a problemas donde solo existe espectro discreto entre $-\pi$ y π ; si los caminos de integración verticales de la figura 2.3(b) se desplazan hacia $p=\pm\pi$ esto dará como resultado un valor nulo a lo largo de estos caminos de integración, quedando solo el espectro discreto de las imágenes.

2.7 Comprobación de los Resultados obtenidos

Mediante la solución numérica de la integral (2.9) para la ecuación de Laplace, en dos dimensiones, se obtuvieron resultados para un ángulo Φ submúltiplo irracional de π . Los resultados se comparan con la solución obtenida con series infinitas, en la tabla 2.2. La columna

V_s se refiere a los valores obtenidos con la solución mediante series y V_I a la solución integral. Obviamente los valores calculados por series o mediante la solución integral coinciden. Los valores mostrados están multiplicados por el factor $2\pi\epsilon_0/q$.

Un comentario adicional merece la condición $r/r_o = 1.0$. Para $\varphi \neq \varphi_o$ el potencial tiene un valor finito. En [47] no se hace comentario alguno sobre la convergencia de la serie para $r/r_o = 1.0$. Para la solución integral bajo esta condición, el valor de $\pm y_c$ tiende a cero, es decir el contorno γ se transforma en dos líneas verticales que pasan por $\pm p$ que dividen al plano α en sectores independientes. La selección de los valores de $\pm p$ sobre el eje real ζ es importante, ya que los ceros de la función logarítmica están sobre este eje real. Los valores $\pm p$ se pueden escoger de tal forma que solamente quede el polo correspondiente a $\alpha = 0$. Esto permite la integración numérica sin la existencia de singularidades sobre el camino de integración.

Tabla 2.2 Valores obtenidos para $2\Phi = \pi / \sqrt{5}$, fuente en $r_o=1, \varphi_o=0$

r/r_o	$\varphi=0$		$\varphi=\pi/(3\sqrt{5})$	
	V_s	V_I	V_s	V_I
0.20	0.054726	0.054726	0.027343	0.027343
0.50	0.431082	0.431082	0.205977	0.205977
0.90	2.143406	2.143406	0.531383	0.531383
0.95	2.859719	2.859719	0.544955	0.544955
1.00	∞	∞	0.548306	0.548640
1.05	2.909644	2.909646	0.545366	0.545366
1.10	2.242822	2.242822	0.534556	0.534556
1.50	0.856543	0.856543	0.362298	0.362298
2.00	0.431082	0.431082	0.205977	0.205977

La solución mediante series para $r/r_o = 1.0$ y $\varphi \neq \varphi_o$ se determinó para diferentes valores en el número de términos de la sumatoria infinita. Los resultados obtenidos muestran un comportamiento oscilatorio en la medida que se incrementa el número de términos. Con la finalidad de observar el comportamiento de la solución mediante series y la solución integral bajo la condición $r/r_o = 1.0$, se calcularon los valores de potencial para el caso $2\Phi = \pi$ y la carga lineal en $\varphi_o=0$. En este caso los valores exactos se pueden determinar mediante la teoría de las imágenes. En la tabla 2.3 se muestran los resultados obtenidos, estos valores se han normalizado respecto al valor de la solución exacta.

Tabla 2.3 Valores obtenidos para $r/r_o = 1.0$, $2\Phi = \pi$, $\varphi_o = 0$

φ	V_s	V_I
$\pi/180$	0.998425	0.999980
$\pi/36$	1.000252	0.999964
$\pi/12$	1.000494	0.999928
$\pi/9$	0.999668	0.999900
$\pi/6$	0.999998	0.999938
$\pi/4$	0.999998	0.999924
$\pi/3$	1.000000	0.999914

La exactitud de los valores obtenidos mediante series infinitas esta sujeto al término donde se trunca la serie. En la tabla 2.3 se puede observar que para $\varphi=\pi/3$ el valor obtenido coincide con

el valor exacto, mientras que para el resto el valor obtenido puede ser mayor o menor. Esto se debe al comportamiento oscilatorio de la serie en función del número de términos. En la solución integral los resultados obtenidos guardan una relación casi constante frente al valor exacto obtenido con la teoría de las imágenes.

En la Fig. 2.4 se muestra la relación entre el valor calculado mediante series V_s y el valor exacto V_e determinado mediante la teoría de imágenes, para un punto ubicado en $\varphi=\pi/6$, $r/r_o=1.0$ y para $2\Phi=\pi$. La carga lineal se ubicó en $\varphi_o=0$. Es de notar el comportamiento oscilatorio amortiguado de la solución con series infinitas, en la medida que se incrementa el número de términos J .

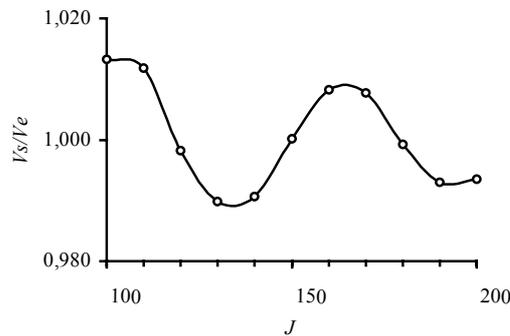


Fig. 2.4 Relación V_s/V_e en función del número de términos J para la solución con series

Otro ejemplo interesante para comprobar la potencialidad de la solución mediante la integral Sommerfeld – Malliyuginetz es el que se ilustra en la figura 2.5

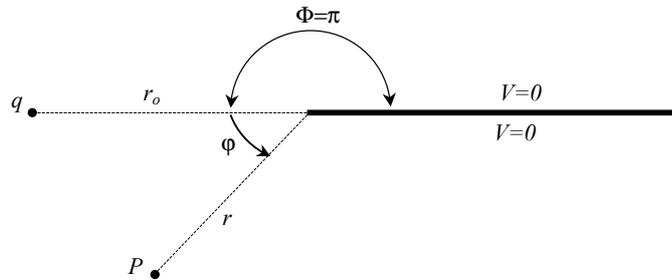


Fig. 2.5 Carga lineal q en un domino cuneiforme con $\Phi=\pi$

La solución explícita de este problema ha sido obtenida en [19]:

$$V(r, \theta) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \left\{ \frac{r_o + 2\sqrt{r.r_o} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + r}{r_o - 2\sqrt{r.r_o} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + r} \right\} \quad (2.25)$$

Donde $\theta = \Phi + \varphi$

Tabla 2.4 Valores de voltaje obtenidos para el problema de la figura 2.5, $r_o=1.0$; $\varphi=\pi/100$, $q=\pi/\varepsilon$

r/r_o	V_I	V_F
0.1	0.654786	0.654794
0.2	0.962209	0.962217
0.3	1.229878	1.229886
0.4	1.490382	1.490390
0.5	1.761693	1.761701
0.6	2.061521	2.061529
0.7	2.415978	2.415986
0.8	2.877429	2.877437
0.9	3.594276	3.594284

En la tabla 2.4 V_I corresponde a los valores obtenidos mediante (2.9) y V_F a los valores obtenidos mediante (2.25). Es obvia la convergencia de los valores obtenidos por ambos métodos.

2.8 Parámetros de secuencia de Líneas de Transmisión Aéreas en Terreno Montañoso

Ha sido práctica común para la determinación de los parámetros de líneas de transmisión aéreas, asumir que el terreno sobre el cual se encuentra la línea ubicada es completamente plano[9]. Sin embargo existen países ubicados sobre zonas geográficas tales, que tienen una parte sustancial de su territorio ubicado en zonas montañosas, como por ejemplo la mayoría de los países suramericanos que se encuentran ubicados sobre la Cordillera de los Andes. Hasta el momento no se tiene conocimiento de algún estudio que determine hasta que punto la solución obtenida para un terreno plano puede extenderse para terrenos de superficie irregular. O cual es el efecto de la presencia de irregularidades en la superficie del terreno sobre los parámetros de una línea de transmisión. Mediante la solución propuesta en forma integral para dominios cuneiformes, es posible tener una primera aproximación del efecto de estas irregularidades, asumiendo que se pueden representar mediante una cuña de longitud infinita. Por ejemplo en la figura 2.6 se muestran tres casos típicos de una línea de transmisión a través de una geografía montañosa.

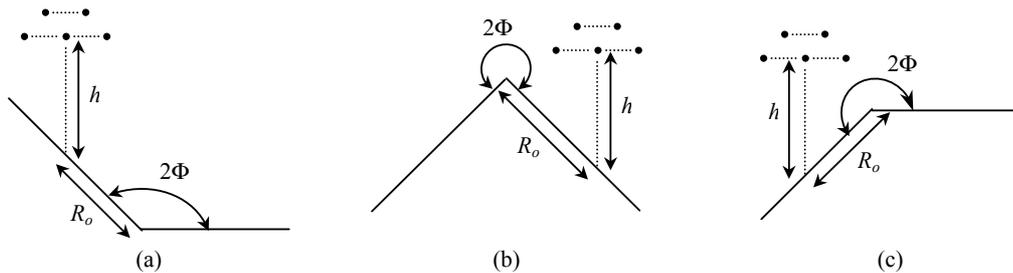


Fig. 2.6 Tres casos típicos de una línea de transmisión en terreno montañoso

En dominios cuneiformes el efecto del vértice de la cuña provoca la difracción del campo electromagnético asociado a cada una de las fases de la línea de transmisión. Este fenómeno se hace mas pronunciado a bajas frecuencias, siendo máximo para campos eléctricos y magnéticos estacionarios. Es oportuno acotar que el fenómeno de la difracción de campos electromagnéticos ha sido ampliamente estudiado y referenciado, incluyendo procesos de propagación de ondas de diferentes tipos como las acústicas y la difracción del calor [31]. Para bajas frecuencias, como las frecuencias de generación de energía eléctrica, 60 Hz en América y 50 Hz en Europa, el valor de

la constante compleja μ en la ecuación de Helmholtz es muy pequeño, y la longitud de onda es del orden de los 5000 km, longitud mucho mayor que cualquier distancia en la geometría transversal y longitudinal de la línea. Es práctica común asumir la solución de campos estacionarios en dos dimensiones, asumiéndolos invariantes a lo largo de la línea, para la determinación de los fenómenos capacitivos, resistivos e inductivos asociados a las líneas de transmisión aéreas[9]. Los campos estacionarios, eléctrico y magnético, están gobernados por la ecuación de Laplace; éstos campos se pueden obtener a partir de funciones potenciales: el potencial escalar eléctrico V , y el vector potencial magnético \mathbf{A} . Las condiciones de contorno asumiendo un terreno perfectamente conductor son de primer género, o condiciones de Dirichlet, $V=0$ ó $\mathbf{A}=0$ en la superficie del terreno.

Mediante la aplicación del principio de superposición, se puede estudiar el caso de líneas trifásicas con sus respectivos conductores de guarda. En la figura 2.7 se muestra el tipo de línea que se tomó como ejemplo para analizar el efecto de las irregularidades del terreno, asumidas éstas como cuñas de longitud infinita paralelas a la trayectoria recorrida por la línea en cuestión.

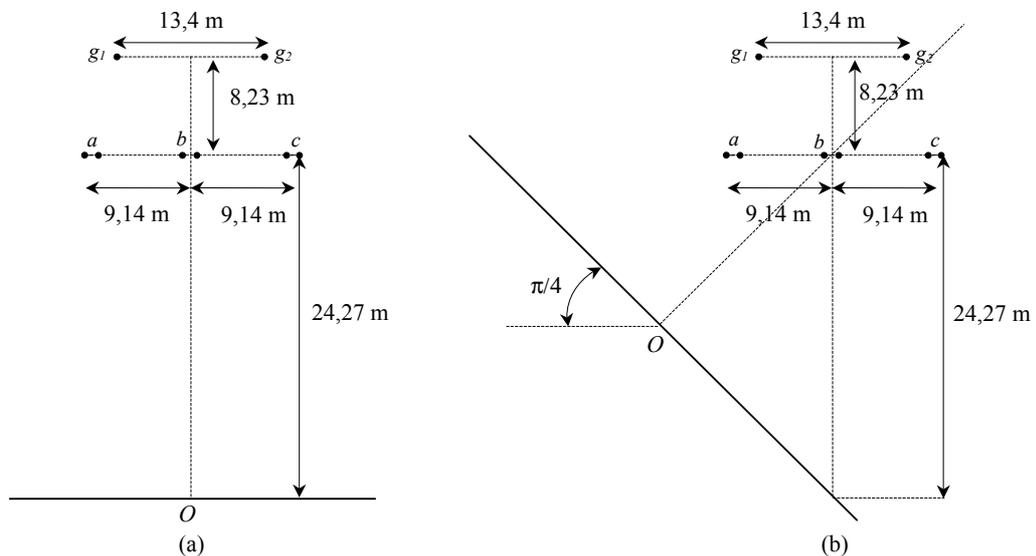


Fig. 2.7 Dimensiones de la línea de transmisión seleccionada para el estudio de los parámetros en terrenos montañosos
 (a) Geometría sobre un terreno plano horizontal
 (b) Geometría sobre un terreno plano inclinado

Los datos del conductor de fase y de guarda se resumen en la tabla 2.5 y sus coordenadas en la tabla 2.6. Cada fase tiene un haz de dos conductores separados 18”.

Tabla 2.5 Datos de los conductores de fase y de guarda

Conductor	Radio, m	Radio haz, m	RMG, m	RMG haz, m	Resistencia, Ω/km , 50°C	Resistencia haz Ω/km , 50°C
Fase: 2x ACAR 42/19 2267kCM	0,02203	0,10036	0,017	0,08816	0,03238	0,01619
Guarda: 7#8 Allumoweld	0,00489	-	0,000637	-	1,51647	-

Tabla 2.6 Coordenadas x,y de los conductores en la figura 2.7, referencia eje vertical al plano que pasa por la fase b

Conductor		a	b	c	g_1	g_2
2.7(a)	X	-9,14	0,0	9,14	-6,70	6,70
	Y	24,27	24,27	24,27	32,50	32,50
2.7(b)	X	-6,46	0,0	6,46	-10,61	-1,13
	Y	10,65	17,11	23,57	18,24	27,72

Obsérvese que en el caso de la figura 2.7(b), la influencia del plano inclinado se manifiesta como la perdida de la simetría bilateral de la línea que exhibe 2.7(a).

De acuerdo a las tres configuraciones mostradas en la figura 2.6, se determinaron los parámetros de secuencia para los siguientes ángulos 2Φ : $3\pi/4$, $3\pi/2$, $5\pi/4$ que corresponden respectivamente a los caso (a), (b) y (c) de la figura 2.6. En estos tres casos el ángulo que forma la ladera inclinada con la horizontal es $\pi/4$, en consecuencia para fines de comparación, los parámetros de secuencia van a variar entre aquellos valores de parámetros correspondientes a $2\Phi = \pi$ con la geometría de la figura 2.7(a), y los valores correspondientes a la figura 2.7(b). La figura 2.7(b) es equivalente a hacer $R_o \rightarrow \infty$ en cualquiera de los casos de la figura 2.6. Es de notar que en las geometrías de la figura 2.7, en contraste con los casos de la figura 2.6, no existe el efecto de difracción del vértice de la cuña sobre los campos eléctrico y magnético.

Para determinar los parámetros de secuencia la metodología es la tradicionalmente utilizada[9]. Se utilizó el concepto de radio y radio medio geométrico(RMG) equivalentes del haz. Se asume transposición completa de la línea. Para determinar las matrices \mathbf{Y} y \mathbf{Z} de la línea se utilizó la solución integral definiendo una matriz \mathbf{B} de dimensiones 5×5 , cada elemento de ésta matriz se determina de la siguiente forma, ver figura 2.8:

$$B_{ij} = c \int_{\gamma} K(r_i, r_j, \alpha) H(\alpha, \phi_i, \phi_j, \phi) d\alpha \quad (2.26)$$

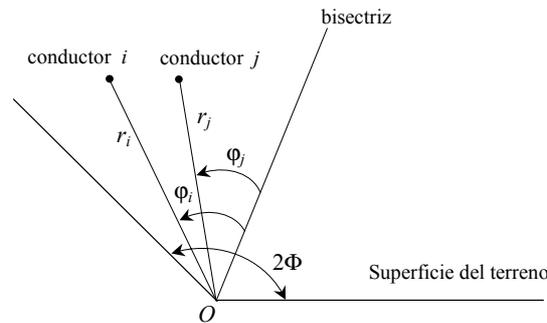


Fig. 2.8 Distancias y coordenadas polares para los conductores

Cuando $i = j$ para la matriz \mathbf{Y} , $r_i = r_j = a$, a es el radio del conductor o el equivalente del haz. Para la matriz \mathbf{Z} , $r_i = r_j = RMG$, RMG es el radio medio geométrico del conductor, o el equivalente del haz. La matriz \mathbf{Y} es simplemente $j2\pi\epsilon\omega\mathbf{B}^{-1}$, la matriz \mathbf{Z} es $(j\omega\mu/2\pi)\mathbf{B} + \mathbf{R}$, donde \mathbf{R} es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal igual a la resistencia del conductor, o del haz. La unidad típica de \mathbf{Y} es S/km, y la unidad de \mathbf{Z} Ω/km . A partir de estas matrices, reduciendo las filas y columnas asociadas a los conductores de guarda, se obtuvieron los respectivos parámetros de secuencia positiva y cero. Los resultados obtenidos para diferentes valores de R_o/h se muestran en las tablas 2.7 a 2.9, h es la altura del conductor central b respecto al terreno, en este caso

$h=24,27$ m . En estas tablas, los valores indicados están normalizados respecto al parámetro correspondiente para la configuración geométrica de la figura 2.7(a), terreno plano. La relación que se indica en estas tablas es un valor complejo con su respectivo módulo y argumento. En la tabla 2.6, primera fila, se listan los valores utilizados para normalizar los resultados obtenidos. Para fines de comparación, en la segunda fila de la tabla 2.6, se incluyen los valores normalizados de los parámetros de secuencia para el terreno plano inclinado, figura 2.7(b).

Tabla 2.6 Parámetros de secuencia para la línea de transmisión de la figura 2.7

		z^+	z_o	Y^+	y_o
Terreno plano horizontal, Fig. 2.7(a)		0,016190+ j0,3648062283	0,0557237+ j0,671429	$j0,3397631057 \times 10^{-5}$	$j0,225952 \times 10^{-5}$
Terreno plano inclinado Fig. 2.7(b)	Mod.	.992903	0,888601	1,006571	1.077285
	Arg.°	-0,01818	0,84869	0,0	0,0

Tabla 2.7 Variación de los parámetros de secuencia en función de la relación $R_o/h, 2\Phi=3\pi/4$, ver figura 2.6 (a). Parámetros normalizados respecto a los valores de la tabla 2.6

R_o/h		z^+	z_o	y^+	y_o
0	Mod.	0,987312	0,863386	1.009854	1.09559
	Arg.°	-0,032678	1,028185	0,0	0,0
0,5	Mod.	0,989702	0,878035	1.008631	1.08452
	Arg.°	-0,026458	0,937375	0,0	0,0
1	Mod.	0,990652	0,883493	1,008159	1,080685
	Arg.°	-0,023994	0,896407	0,0	0,0
2	Mod.	0,991280	0,887230	1,007859,	1,078208
	Arg.°	-0,236918	0,863919	0,0	0,0
4	Mod.	0,991542	0,888971	1,007740	1,077120
	Arg.°	-0,021689	0,846600	0,0	0,0
6	Mod.	0,991602	0,889411	1,007713	1,076850
	Arg.°	-0,021536	0,841847	0,0	0,0
10	Mod.	0,991634	0,889670	1,007700,	1,076700
	Arg.°	-0,021452	0,838938	0,0	0,0

Tabla 2.8 Variación de los parámetros de secuencia en función de la relación $R_o/h, 2\Phi=3\pi/2$, ver figura 2.6 (b). Parámetros normalizados respecto a los valores de la tabla 2.6

R_o/h		z^+	z_o	y^+	y_o
0	Mod.	1,005170	1,117552	0,996648,	0,939050
	Arg.°	0,133586	1,079752	0,0	0,0
0,5	Mod.	1,002329	1,017554	0,998577	0,994201
	Arg.°	0,126481,	-0, 326868	0,0	0,0
1	Mod.	0,994458	0,933566	1,005077	1,049383
	Arg.°	0,106252	0,313917	0,0	0,0
2	Mod.	0,991842	0,896060	1,007648	1,073262
	Arg.°	0,099512	0,745681	0,0	0,0
4	Mod.	0,991726	0,890971	1,007668	1,075974
	Arg.°	0,099292	0,821619	0,0	0,0
6	Mod.	0,991680	0,890290	1,007680,	1,076345
	Arg.°	0,991941	0,083105	0,0	0,0
10	Mod.	0,991660	0,889986	1,007687,	1,07651
	Arg.°	0,099136	0,835084	0,0	0,0

Tabla 2.9 Variación de los parámetros de secuencia en función de la relación R_o/h , $2\Phi=5\pi/4$, ver figura 2.6 (c). Parámetros normalizados respecto a los valores de la tabla 2.6

R_o/h		z^+	z_o	y^+	y_o
0	Mod.	1,002869	1,050872	0,998241	0,972055
	Arg.°	0,007274	-0,451976	0,0	0,0
0,5	Mod.	0,999700	0,970530	1,000677	0,997023
	Arg.°	0,112810	0,877867	0,0	0,0
1	Mod.	0,993636	0,918532	1,005841	1,058374
	Arg.°	-0,016286	0,497646	0,0	0,0
2	Mod.	0,991842	0,896060	1,007648	1,073262
	Arg.°	0,099512	0,745681	0,0	0,0
4	Mod.	0,991701	0,890571	1,007676	1,07619
	Arg.°	0,212805	0,827033	0,0	0,0
10	Mod.	0,991661	0,889932	1,007689,	1,07654
	Arg.°	-0,021382	0,835793	0,0	0,0

De los resultados obtenidos, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- La impedancia y admitancia de secuencia positiva, z^+ , y^+ , como era de esperarse, se afectan en menor grado por la inclinación del terreno y la presencia del vértice de la cuña. En contraste los parámetros de secuencia cero, z_o , y_o , sí están influenciados por la presencia de los vértices y a la inclinación del terreno.
- El mayor efecto sobre los parámetros se observa cuando la línea se ubica en el vértice de la cuña.
- El mayor efecto sobre los parámetros de secuencia cero se observa para el caso de la figura 2.6(b), cuando la línea se ubica sobre el vértice, $R_o/h=0$.
- La impedancia serie de secuencia cero, z_o , se incrementa para ángulos $2\Phi>\pi$. Por el contrario y_o , disminuye. Para $2\Phi<\pi$ el efecto es opuesto: disminuye z_o , y se incrementa y_o . Obsérvese que para el caso 2.6(b), z_o se incrementa en un máximo de 11% aproximadamente, mientras que en el caso 2.6(a) se disminuye aproximadamente en la misma proporción del 11%.
- En la medida que la ubicación de la línea de transmisión se aleja del vértice, lo que es equivalente a incrementar el valor de R_o/h , el efecto del vértice disminuye, prevaleciendo el efecto de la inclinación del terreno.

En general se puede concluir que para los efectos de flujo de carga, o aquellos estudios donde se utilizan como modelo de la línea los parámetros de secuencia positiva, las irregularidades del terreno no tienen un efecto sustancial en los resultados. Por el contrario, en aquellos estudios donde entra en juego el parámetro de secuencia cero éste efecto debería ser incluido. El vértice, como es lógico, tiene un efecto local, la inclinación del terreno afecta en forma general. Esta inclinación del terreno trae como consecuencia la pérdida de la simetría bilateral, incrementando el desbalance de voltajes y corrientes a lo largo de la línea.

2.9 Efecto de cuñas y vértices de sobre el desbalance en líneas de transmisión no traspuestas

En líneas de transmisión aéreas la presencia del terreno no permite obtener matrices \mathbf{Z} , \mathbf{Y} que relacionen de una manera natural componentes de voltaje y corriente de secuencia positiva de una misma fase, sin el acoplamiento eléctrico y magnético entre voltajes y corrientes de diferentes fases[9]. La máxima simetría que se consigue es la simetría bilateral exhibida por líneas con distribución horizontal de conductores, como en la figura 2.7(a). Este acoplamiento entre voltajes y corrientes produce desbalances en voltajes y corrientes a lo largo de la línea de transmisión, aún cuando la fuente sea una fuente trifásica balanceada en voltajes y corrientes.

Una forma de medir el desbalance de líneas no traspuestas se propone en[4]. El punto de partida es que la matriz de vectores propios de uso generalizado en los estudios de Sistemas de Potencia, matriz de Fortescue o matriz \mathbf{A}_F , diagonaliza las matrices \mathbf{Z}_t , \mathbf{Y}_t , \mathbf{ZY}_t y cuando se asume transposición total de los conductores de la línea. Si se intenta diagonalizar la matriz \mathbf{ZY} de una línea no traspuesta mediante la matriz \mathbf{A}_F , obviamente no se obtendrá una matriz diagonal, lo que se obtiene es la proyección \mathbf{ZY}^* de \mathbf{ZY} en el espacio vectorial de \mathbf{A}_F . Los elementos que se obtienen fuera de la diagonal principal pueden ser utilizados como una medida del desbalance de la línea, sin embargo la matriz de diagonalización de una matriz \mathbf{ZY}_t traspuesta no es única[6]. En consecuencia puede conducir a resultados incoherentes.

En [4] se utilizaron como medida del desbalance los factores desarrollados para aproximar los valores propios y vectores propios de la matriz \mathbf{ZY} mediante el método de las perturbaciones, ver [5]. Sin embargo una generalización mas amplia de la aproximación de valores y vectores propios de \mathbf{ZY} , se desarrollo en [6]. Esta última aproximación se va a utilizar para proponer un indicador para medir el desbalance. En [6] se demuestra que mediante una aproximación de primer orden la matriz de transformación \mathbf{T} se puede expresar como $\mathbf{T}=\mathbf{A}_F\mathbf{W}$. Donde la matriz \mathbf{W} representa la transformación lineal que permite expresar \mathbf{T} como una combinación lineal del espacio vectorial \mathbf{A}_F de los componentes simétricos. Es decir \mathbf{W} permite la proyección de \mathbf{T} sobre \mathbf{A}_F con mínimo error. Los elementos de la diagonal principal de \mathbf{W} son iguales a la unidad, si $\mathbf{T}=\mathbf{A}_F$, \mathbf{W} es igual a la matriz identidad y sus elementos fuera de la diagonal principal serán nulos. Es posible entonces utilizar como medida del desbalance los valores de los elementos fuera de la diagonal principal de \mathbf{W} que no son nulos. Como una medida de desbalance se ha asumido el promedio de la sumatoria de los módulos de todos los elementos fuera de la diagonal principal de \mathbf{W} . La matriz \mathbf{W} se obtiene como un proceso de minimización de la proyección de la matriz \mathbf{T} sobre el espacio vectorial de los componentes simétricos \mathbf{A}_F . Los detalles para obtener la matriz \mathbf{W} están descritos en [6] y se resumen en el apéndice C. De esta forma se evitan las incoherencias que pueden surgir de asumir la matriz \mathbf{A}_F , u otra matriz del espacio de los componentes simétricos como la transformación de Clarke, para definir un indicador de desbalance.

En la tabla 2.10 se muestran las matrices $\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{ZY}^*$ y \mathbf{W} para los casos estudiados de acuerdo a las figuras 2.6 y 2.7. Solo se estudiaron los casos cuando la línea se encuentra sobre el vértice de la cuña, $R_0/h=0$. Se obtuvieron los siguientes resultados para el índice del grado de desbalance:

Caso 2.6(a) índice de desbalance: 0,41805,

Caso 2.6(b) índice de desbalance: 0,3516

Caso 2.6(c) índice de desbalance: 0,3615.

Caso 2.7(a), terreno plano, índice de deabalance: 0,3593.

Caso 2.7(b) terreno inclinado, índice de desbalance: 0,4201.

Tabla 2.10 Matrices Z, Y y $ZY^* = A_F^{-1} ZYA_F$, figuras 2.6 2.7, relación $Ro/h=0$.

Caso		
2.6(a)	$Z(\Omega/\text{km})$	$10^{-5} ZY^*$
	[0,021471+j0,408781 0,006422+j0,078463 0,005829+j0,043578] [0,006422+j0,784631 0,024826+j0,437820 0,008599+j0,098589] [0,005829+j0,043578 0,008599+j0,098589 0,025383+j0,453355]	[-0,143098+j0,009311 0,001975+j,000027 0,002170-j0,000567] [0,002217-j0,000711 -0,122611+0,005788 -0,001048-j 0,002295] [0,002113+j,000079 -0,001282+j0,002270 -0,122619+j0,005772]
	$j10^{-5}Y(\text{S}/\text{km})$	W
	[0,320294 -0,037670, -0,013241] [-0,037670 0,312698, -0,044623] [-0,013241 -0,044623 0,300781]	[1,0 0,052253+j0,119517 0,134333+j0,080736] [-0,110899+j0,015603 1,0 0,451057+0,878095] [-0,099530-j0,021003 -0,460232+0,910529*j1, 1,0]
2.6(b)	$Z(\Omega/\text{km})$	$10^{-5} ZY^*$
	[0,036147+j0,495321 0,020500+j0,143793 0,018410+j0,095172] [0,020500+j0,143793 0,038096+j0,490995 0,020500+j0,143793] [0,018410+j0,095172 0,020500+j0,143793 0,036147+j0,495321]	[-0,158756+j0,016195 0,000453+j0,000725 0,000402-j0,000755] [0,000408-j0,001083 -0,123163+j0,005730 -0,001418-j0,002724] [0,000733+j0,000894 -0,001650+j0,002589 -0,123163+j0,005730]
	$j10^{-5}Y(\text{S}/\text{km})$	W
	[0,292748 -0,051867 -0,022710] [-0,051867 0,303932 -0,051867] [-0,022710 -0,051867 0,292748]	[1,0 0,012386+j0,044407 0,000013+0,000008] [-0,018760+j0,024906 1,0 0,500672+j0,866411] [-0,012165-j0,028694 -0,500176+0,866366 1,0]
2.6(c)	$Z(\Omega/\text{km})$	$10^{-5} ZY^*$
	[0,031173+j0,472924 0,015878+j0,126038 0,014398+j0,081105] [0,015878+j0,126038 0,033883+j0,476798 0,016874+j0,132496] [0,014398+j0,081105 0,016873+j0,132496 0,033038+j0,486283]	[-0,154650+j0,014067 0,000884+j0,000413 0,000956-j0,000704] [0,000974-j0,000979 -0,123091+j0,005738 -0,001365-j0,002670] [0,000112+j0,000550 -0,001604+j0,002549 -0,123094+j0,005731]
	$j10^{-5}Y(\text{S}/\text{km})$	W
	[0,298305 -0,048628 -0,020432] [-0,048628 0,305888 -0,050468] [-0,020432 -0,050468 0,293775]	[1,0 0,017864+j0,055237 0,028582+j0,015938] [-0,036506+j0,021383 1,0 0,493607+j0,865251] [-0,028886-j0,025067 -0,494633+j0,870901 1,0]
2.7(a)	$Z(\Omega/\text{km})$	$10^{-5} ZY^*$
	[[0,029312+j0,467164 0,013547+j0,118152 0,011689+j0,070695] [0,013547+j0,118152 0,030982+j0,465959 0,013547+j0,118152] [0,011689+j0,070695 0,013547+j0,118152 0,029312+j0,467164]	[-0,151500+j0,012575 0,000548+j0,000855 0,000467-j0,000902] [0,000478-j0,001137 -0,123004+j0,005734 -0,001340-j0,002593] [0,000746+j0,000982 -0,001576+j0,002456 -0,123004+j0,005734]
	$j10^{-5}Y(\text{S}/\text{km})$	W
	[0,298973 -0,047590 -0,018631] [-0,047590 0,307531 -0,047590] [-0,018631 -0,475902 0,298973]	[1,0 0,022762+j0,065500 0,000010+j0,000035] [-0,024900+j0,033932 1,0 0,501209+j0,866871] [-0,016936-j0,038516 -0,500133+0,867117 1,0]
2.7(b)	$Z(\Omega/\text{km})$	$10^{-5} ZY^*$
	[0,021879+j0,410286 0,007107+j0,081380 0,006687+j0,047717] [0,007107+j0,081380 0,025959+j0,443439 0,009990+j0,106336] [0,006686+j0,047713 0,009990+j0,106336 0,027056+j0,466985]	[-0,144643+j0,009874 0,002296-j0,000680 0,002538-j0,000448] [0,002607-j0,000589 -0,122769+j0,005789 -0,001052-j0,002393] [0,002444-j0,000239 -0,001291+j0,002412 -0,122776+j,005776]
	$j10^{-5}Y(\text{S}/\text{km})$	W
	[0,320092 -0,038198 -0,014058] [-0,038198 0,311476 -0,0463252] [-0,014058 -0,046325 0,295837]	[1,0 0,051320+j0,112509 0,153775+0,094563] [-0,120036+j0,004481 1,0 0,426354+j0,871609] [-0,109941-0,009663 -0,442296+j0,914344 1,0]

Estos resultados son coherentes con las geometrías indicadas en la figura 2.6 y 2.7. Como es de esperar los indicadores de desbalance para los casos 2.6, son menores que en el caso extremo de un terreno inclinado sin vértices. Se observa que el indicador es menor para el caso 2.6(b), que para el caso 2.7(a), el cual es ligeramente mayor, aún cuando ambos tienen simetría bilateral. El indicador debería tener el mismo valor. Sin embargo para fines prácticos y de comparación parece adecuado.

CAPITULO 3

FUENTE PUNTUAL DE CORRIENTE EN TERRENO MULTISTRATIFICADO HORIZONTALMENTE, Y TERRENO NO PLANO

El diseño de Sistemas de Conexión a Tierra requiere la respuesta del potencial en la superficie del terreno cuando se inyecta una corriente en el terreno a cualquier profundidad. Para terrenos homogéneos esta respuesta ha sido ampliamente estudiada[23,33,34,53], para terrenos modelados mediante dos estratos también se han desarrollado expresiones para obtener estos potenciales[20,31,46]. Para terrenos modelados mediante estratos paralelos superpuestos, de resistividad y espesor dados, lo fundamental es obtener la función de Green de una fuente puntual de corriente ubicada en cualquier estrato[32,41,42]. Esta fuente puntual genera una distribución de potencial en todos los estratos, diferente para cada estrato. En este capítulo se desarrolla un procedimiento para obtener de manera sistemática la función potencial de cada estrato, cuando una fuente puntual de corriente se ubica en un estrato determinado. Para obtener la respuesta de electrodos lineales, que puedan conformar un Sistema de Conexión a Tierra, se extiende la solución obtenida para una fuente puntual mediante el método del potencial promedio.

Por otro lado, aprovechando la solución de la función de Green para dominios cuneiformes hecha en el capítulo 2, se hace un análisis de la respuesta de un Sistema de Tierra en terrenos homogéneos no planos.

3.1 Solución del problema de contorno en el Dominio Espectral

Sea un terreno con N estratos horizontales con resistividad y espesor dados, ver figura 3.1. En el punto $F(z_F, r_F)$ del estrato j , se ubica una fuente puntual de corriente que inyecta una corriente I_j . Se desea conocer el potencial que genera esta fuente puntual de corriente en cada estrato $1 \leq i \leq N$ del terreno. Esto equivale a resolver el siguiente problema de contorno:

$$\nabla^2 V_{ij} = 0 \quad P \neq F(z_F, r_F) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial z} = 0 \quad P \in S_o \quad (3.2)$$

$$V_{ij}(P) = 0 \quad P \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Para $i=1,2,..,j.. N-1$. En cada superficie S_i de separación de estratos se debe cumplir:

$$V_{ij} = V_{i+1,j} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial V_{ij}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial V_{i+1,j}}{\partial z} \quad (3.5)$$

En el estrato E_j con la fuente puntual de corriente en $F(z_F, r_F)$, cuando $P(z,r) \rightarrow F(z_F, r_F)$ el potencial V_{ij} no está definido, $V_{ij} \rightarrow \infty$. Asumiendo $r_F = 0$, la solución general de (3.1) para el potencial V_{qj} en un estrato E_q , generado por la fuente puntual de corriente en el estrato E_j , se puede postular de la siguiente forma:

$$V_{qj} = \frac{\rho_j \cdot I_j}{4\pi} \int_0^{\infty} (\phi_{qj} \cdot e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{qj} \cdot e^{\lambda(z-z_F)}) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.6)$$

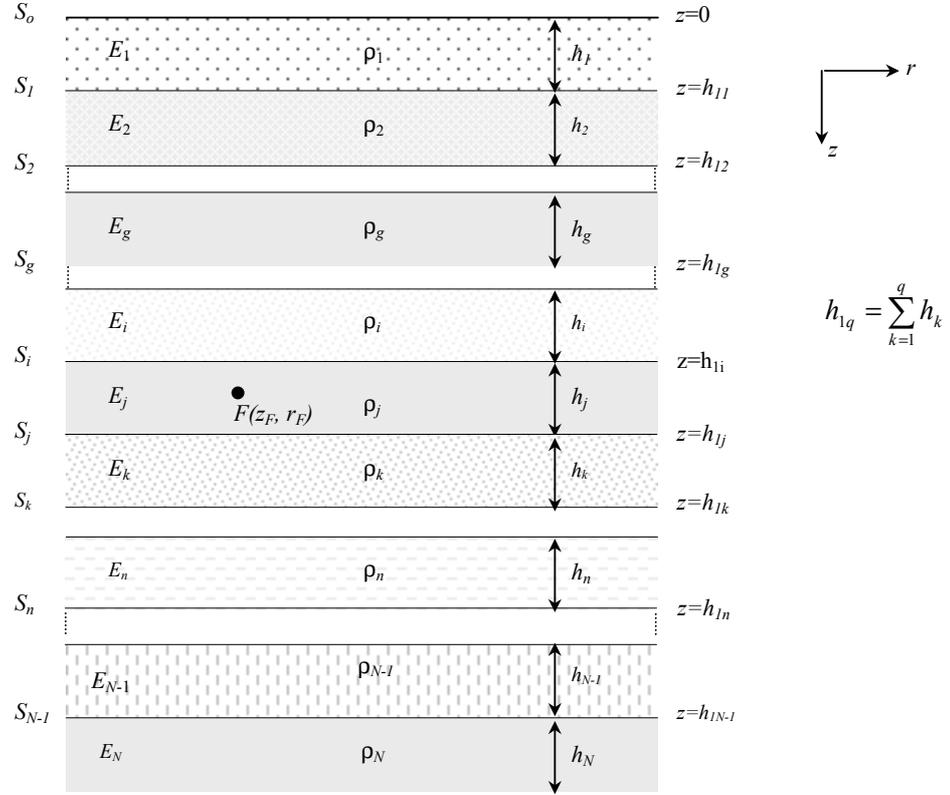


Fig. 3.1 Terreno multiestratificado con fuente puntual de corriente en el estrato j

ϕ , ψ son funciones del parámetro λ que permiten los grados de libertad suficientes para satisfacer las condiciones de contorno (3.4), (3.5) en las superficies S_i ($i \neq 0$). Aplicando las condiciones de contorno para $z = h_{1p}$, ($h_{1p} = \sum_{k=1}^p h_k$), entre dos estratos consecutivos E_p y E_q ($q=p+1, p, q \neq j$) con fuente puntual en el estrato E_j , se obtienen las siguientes relaciones para $z=h_{1p}$:

$$\phi_{pj} \cdot e^{-\lambda(h_{1p}-z_F)} + \psi_{pj} \cdot e^{\lambda(h_{1p}-z_F)} = \phi_{qj} \cdot e^{-\lambda(h_{1p}-z_F)} + \psi_{qj} \cdot e^{\lambda(h_{1p}-z_F)} \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{\rho_p} \phi_{pj} \cdot e^{-\lambda(h_{1p}-z_F)} + \frac{1}{\rho_p} \psi_{pj} \cdot e^{\lambda(h_{1p}-z_F)} = -\frac{1}{\rho_q} \phi_{qj} \cdot e^{-\lambda(h_{1p}-z_F)} + \frac{1}{\rho_q} \psi_{qj} \cdot e^{\lambda(h_{1p}-z_F)} \quad (3.8)$$

Las relaciones (3.7) y (3.8) se pueden escribir en forma compacta como:

$$\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{F}_{pj} = \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{F}_{qj} \quad (3.9)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{mj} = [\phi_{mj} \quad \psi_{mj}]^T ; \text{T: traspuesta} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A}_m = \frac{1}{\rho_m} \begin{bmatrix} \rho_m e^{-\lambda(h_{1m}-z_F)} & \rho_m e^{\lambda(h_{1m}-z_F)} \\ -e^{-\lambda(h_{1m}-z_F)} & e^{-\lambda(h_{1m}-z_F)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

En el estrato E_j debido a la presencia de la fuente puntual la solución para el potencial V_{jj} debe incluir un factor adicional, en efecto:

$$V_{jj} = \frac{\rho_j \cdot I_j}{4\pi} \int_0^\infty \left(e^{-\lambda|z-z_F|} + \phi_{qj} \cdot e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{qj} \cdot e^{\lambda(z-z_F)} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.12)$$

Para los estratos consecutivos E_i, E_j, E_k ($i=j-1, k=j+1$), con una fuente puntual de corriente en E_j en el punto $F(z_F, r_F)$, ver figura 3.1, se pueden escribir las siguientes relaciones:

Para $z = h_{1i}$:

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{F}_{jj} + \begin{bmatrix} e^{-\lambda|z-z_F|} & \frac{1}{\rho_j} e^{-\lambda|z-z_F|} \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

Para $z = h_{1k}$:

$$\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{F}_{kj} = \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{F}_{jj} + \begin{bmatrix} e^{-\lambda|z-z_F|} & -\frac{1}{\rho_j} e^{-\lambda|z-z_F|} \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

Con las relaciones (3.9) a (3.14), mediante un proceso algebraico directo, se puede obtener un procedimiento para obtener las funciones ϕ_{mj}, ψ_{mj} para cada estrato E_m ($m \leq N$), que determinan el potencial V_{mj} originado por la fuente puntual de corriente en el estrato E_j . La estrategia es diferenciar los estratos E_g , ($1 \leq g \leq j-1$), por encima del estrato E_j , de aquellos estratos E_n , ($j+1 \leq n \leq N$), por debajo del estrato E_j .

Para los estratos E_g , ($1 \leq g \leq j-1$), se obtienen las siguientes relaciones recurrentes con la función ϕ_{1j} :

$$\prod_{w=1}^{g-1} (1 - K_w) \phi_{gj} = u_g \cdot \phi_{1j} \quad (3.15)$$

$$\prod_{w=1}^{g-1} (1 - K_w) \psi_{gj} = v_g \cdot e^{2\lambda z_F} \phi_{1j} \quad (3.16)$$

Para los estratos E_n , ($j+1 \leq m \leq N$), se obtienen las siguientes relaciones recurrentes con la función ϕ_{Nj} :

$$\prod_{w=N}^{N-1} (1 + K_w) \cdot \phi_{mj} = \alpha_{Nm} \cdot \phi_{Nj} \quad (3.17)$$

$$\prod_{w=m}^{N-1} (1 + K_w) \cdot \psi_{gj} = \beta_{Nm} \cdot e^{-2\lambda(h_{1m} - z_F)} \phi_{Nj} \quad (3.18)$$

Particularizando (3.15) a (3.18) para $g = m = j$ se obtiene un sistema de ecuaciones para las funciones ϕ_{1j} , ϕ_{1N} , ϕ_{jj} , ψ_{jj} que arroja los siguientes resultados:

$$\phi_{1j} = \frac{(\alpha_{Nj} \cdot e^{-2\lambda z_F} + \beta_{Nj} \cdot e^{-2\lambda h_{1j}})}{v_N} \prod_{w=1}^{j-1} (1 - K_w) \quad j \neq 1 \quad (3.19)$$

Para $j \neq 1$ $\psi_{1j} = \phi_{1j} \cdot e^{2\lambda z_F}$.

$$\phi_{Nj} = \frac{(u_j \cdot e^{-2\lambda z_F} + v_j)}{v_N} \prod_{w=j}^{N-1} (1 + K_w) \quad N \neq j \quad (3.20)$$

$$\phi_{jj} = \frac{(\alpha_{Nj} \cdot e^{-2\lambda z_F} + \beta_{Nj} \cdot e^{-2\lambda h_{1j}}) u_j}{v_N} \quad (3.21)$$

$$\psi_{jj} = \frac{(u_j + v_j \cdot e^{2\lambda z_F}) \beta_{Nj} \cdot e^{-2\lambda h_{1j}}}{v_N} \quad (3.22)$$

El factor K_w está dado por:

$$K_m = \frac{\rho_{m+1} - \rho_m}{\rho_{m+1} + \rho_m} \quad (3.23)$$

Los factores u, v tienen las siguientes relaciones recurrente a partir de $u_1 = v_1 = 1$:

$$u_{m+1} = u_m - K_m \cdot e^{2\lambda h_{1m}} \cdot v_m \quad (3.24)$$

$$v_{m+1} = v_m - K_m \cdot e^{-2\lambda h_{1m}} \cdot u_m \quad (3.25)$$

Los factores α, β se obtienen mediante las relaciones recurrentes deducidas en[61]:

$$\alpha_{N,m-1} = \alpha_{Nm} + \beta_{Nm} K_{m-1} \cdot e^{-2\lambda h_m} \quad (3.26)$$

$$\beta_{N,m-1} = K_{m-1} \alpha_{Nm} + \beta_{Nm} \cdot e^{-2\lambda h_m} \quad (3.27)$$

Las relaciones recurrentes (3.26) y (3.27) se inician con $\alpha_{NN} = 1$, $\beta_{NN} = 0$, $\alpha_{N,N-1} = 1$ y $\beta_{N,N-1} = K_{N-1}$. Se puede demostrar mediante un proceso directo de sustitución que:

$$\alpha_{Nm} \cdot v_m - \beta_{Nm} \cdot e^{-2\lambda h_m} \cdot u_m \equiv \alpha_{N1} - \beta_{N1} \cdot e^{-2\lambda h_1} \quad (3.28)$$

De esta identidad para $m=N$, se obtiene que:

$$v_N = \alpha_{N1} - \beta_{N1} \cdot e^{-2\lambda h_1} \quad (3.29)$$

Los factores u , v , α , β son una sumatoria de funciones exponenciales del parámetro λ y las distancias h_m y h_{1m} . Cada función exponencial de la sumatoria está multiplicada por coeficientes que dependen de los valores K_m . En la tabla 3.1 se resumen estos coeficientes para terrenos de 2, 3, 4 y 5 estratos. Los coeficientes A_i , B_i , y exponentes a_i corresponden a los factores α y β . Para los factores u y v se tienen los coeficientes M_i y exponentes m_i . Para cada factor u , v , α , β podemos escribir entonces las siguientes sumatorias:

Para $2 \leq q \leq N$:

$$u_q = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} M_i \cdot e^{2\lambda m_i} \quad (3.30)$$

$$v_q = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} M_i \cdot e^{-2\lambda m_i} \quad (3.31)$$

Para $1 \leq q \leq N-2$:

$$\alpha_{Nq} = \sum_{i=1}^{2^{N-q-1}} A_i \cdot e^{-2\lambda a_i} \quad (3.32)$$

$$\beta_{Nq} = \sum_{i=1}^{2^{N-q-1}} B_p \cdot e^{-2\lambda a_i} \quad (3.33)$$

En general $p=i$ en (3.33). Sin embargo, para determinar el factor β_{Nq} mediante la tabla 3.1, se requiere de la siguiente modificación para que el subíndice p , del coeficiente B_p en la expresión (3.33), se corresponda con la secuencia indicada en la tabla 3.1: en la medida que i se incrementa desde 1 hasta 2^{N-q-1} en la sumatoria (3.33), el subíndice p del coeficiente B_p se determina mediante $p = 2^{N-2} - 2^{N-q-1} + i$. Por ejemplo si $N=5$, para $q=2$ en la sumatoria (3.33) se tiene $i=1,2,3,4$; entonces los coeficientes B_p correspondientes a estos valores de i serán los elementos B_5 , B_6 , B_7 , B_8 de la tabla 3.1. Para los factores u , v , α el subíndice i de la respectiva sumatoria se corresponde con la secuencia indicada en la tabla 3.1. En el apéndice D se ilustra la aplicación de las expresiones anteriores, para un terreno de tres estratos con fuente puntual de corriente ubicada en el segundo estrato.

Tabla 3.1 Factores factores A_i , B_i , a_i , M_i , m_i para terreno de 2, 3, 4 y 5 estratos

N	i	A_i	B_i	a_i	M_i	m_i
2	1	1.0	K_1	0.0	1.0	0
	2				$-K_1$	h_{11}
3	1	1.0	K_1	0.0	1.0	0.0
	2	$K_1 K_2$	K_2	h_{12}	$-K_1$	h_{11}
	3				$-K_2$	h_{12}
	4				$K_1 K_2$	$h_{12} - h_{11}$
4	1	1.0	K_1	0.0	1.0	0.0
	2	$K_2 K_3$	$K_1 K_2 K_3$	h_{13}	$-K_1$	h_{11}
	3	$K_1 K_2$	K_2	h_{12}	$-K_2$	h_{12}
	4	$K_1 K_3$	K_3	$h_{12} + h_{13}$	$K_1 K_2$	$h_{12} - h_{11}$
	5				$-K_3$	h_{13}
	6				$K_1 K_3$	$h_{13} - h_{11}$
	7				$K_2 K_3$	$h_{13} - h_{12}$
	8				$-K_1 K_2 K_3$	$h_{13} - h_{12} + h_{11}$
5	1	1.0	K_1	0.0	1.0	0.0
	2	$K_3 K_4$	$K_1 K_3 K_4$	h_{14}	$-K_1$	h_{11}
	3	$K_2 K_3$	$K_1 K_2 K_3$	h_{13}	$-K_2$	h_{12}
	4	$K_2 K_4$	$K_1 K_2 K_4$	$h_{13} + h_{14}$	$K_1 K_2$	$h_{12} - h_{11}$
	5	$K_1 K_2$	K_2	h_{12}	$-K_3$	h_{13}
	6	$K_1 K_2 K_3 K_4$	$K_2 K_3 K_4$	$h_{12} + h_{14}$	$K_1 K_3$	$h_{13} - h_{11}$
	7	$K_1 K_3$	K_3	$h_{12} + h_{13}$	$K_2 K_3$	$h_{13} - h_{12}$
	8	$K_1 K_4$	K_4	$h_{12} + h_{13} + h_{14}$	$-K_1 K_2 K_3$	$h_{13} - h_{12} + h_{11}$
	9				$-K_4$	h_{14}
	10				$K_1 K_4$	$h_{14} - h_{11}$
	11				$K_2 K_4$	$h_{14} - h_{12}$
	12				$-K_1 K_2 K_4$	$h_{14} - h_{12} + h_{11}$
	13				$K_3 K_4$	$h_{14} - h_{13}$
	14				$-K_1 K_3 K_4$	$h_{14} - h_{13} + h_{11}$
	15				$-K_2 K_3 K_4$	$h_{14} - h_{13} + h_{12}$
	16				$K_1 K_2 K_3 K_4$	$h_{14} - h_{13} + h_{12} - h_{11}$

Así las funciones ϕ , ψ pueden escribirse en forma de sumatoria de la siguiente manera:

ϕ_{1j} , ψ_{1j} para $j \neq 1, j \neq N$:

$$\phi_{1j} = \prod_{w=1}^{j-1} (1 - K_w) \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(A_i \cdot e^{-2\lambda(a_i + z_F)} + B_i \cdot e^{-2\lambda(a_i + h_{1j})} \right) \frac{1}{v_N} \quad (3.34)$$

$$\psi_{1j} = \prod_{w=1}^{j-1} (1 - K_w) \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(A_i \cdot e^{-2\lambda a_i} + B_i \cdot e^{-2\lambda(a_i + h_{1j} - z_F)} \right) \frac{1}{v_N} \quad (3.35)$$

Las funciones ϕ_{jj} , ψ_{jj} :

$$\phi_{jj} = \left(\sum_{q=1}^{2^{j-1}} M_q \cdot e^{2\lambda m_q} \right) \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(A_i \cdot e^{-2\lambda(a_i + z_F)} + B_i \cdot e^{-2\lambda(a_i + h_{1j})} \right) \frac{1}{v_N} \quad (3.36)$$

$$\Psi_{jj} = \left(\sum_{q=1}^{2^{N-j-1}} B_q \cdot e^{-2\lambda(a_q+h_{1j})} \right) \sum_{i=1}^{2^{j-1}} (M_i \cdot e^{2\lambda m_i} + M_i \cdot e^{-2\lambda(m_i-z_F)}) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.37)$$

Para el estrato N $\Psi_{Nj} = 0$, y ϕ_{Nj} se puede escribir de la siguiente manera:

$$\phi_{Nj} = \prod_{w=j}^{N-1} (1 + K_w) \sum_{i=1}^{2^{j-1}} (M_i \cdot e^{2\lambda(m_i-z_F)} + M_i \cdot e^{-2\lambda m_i}) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.38)$$

Para los estratos E_g ($1 < g < j$), por encima del estrato E_j se tiene:

$$\phi_{gj} = \prod_{w=g}^{j-1} (1 - K_w) \left(\sum_{q=1}^{2^{g-1}} M_q \cdot e^{2\lambda m_{qi}} \right)^{2^{N-j-1}} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} (A_i \cdot e^{-2\lambda(a_i+z_F)} + B_i \cdot e^{-2\lambda(a_i+h_{1j})}) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.39)$$

$$\Psi_{gj} = \prod_{w=g}^{j-1} (1 - K_w) \left(\sum_{q=1}^{2^{g-1}} M_q \cdot e^{-2\lambda m_{qi}} \right)^{2^{N-j-1}} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} (A_i \cdot e^{-2\lambda a_i} + B_i \cdot e^{-2\lambda(a_i+h_{1j}-z_F)}) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.40)$$

Para los estratos E_n ($j < n < N$) por debajo del estrato E_j se tiene:

$$\phi_{nj} = \prod_{w=j}^{n-1} (1 + K_w) \left(\sum_{q=1}^{2^{N-n-1}} A_q \cdot e^{-2\lambda a_q} \right)^{2^{j-1}} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} (M_i \cdot e^{2\lambda(m_i-z_F)} + M_i \cdot e^{-2\lambda m_i}) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.41)$$

$$\Psi_{nj} = \prod_{w=j}^{n-1} (1 + K_w) \left(\sum_{q=1}^{2^{N-n-1}} B_q \cdot e^{-2\lambda(a_q+h_{1n}-z_F)} \right)^{2^{j-1}} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} (M_i \cdot e^{2\lambda(m_i-z_F)} + M_i \cdot e^{-2\lambda m_i}) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.42)$$

Cuando la fuente puntual se encuentra en el estrato mas profundo, $j = N$, las expresiones se simplifican notablemente:

$$\phi_{NN} = \sum_{i=1}^{2^{N-1}} (M_i \cdot e^{2\lambda(m_i-z_F)}) \cdot \frac{e^{-2\lambda z_F}}{v_N} \quad (3.43)$$

Para los estratos E_g por encima del éste último estrato N , se tiene:

$$\phi_{gN} = \prod_{w=g}^{N-1} (1 - K_w) \left(\sum_{q=1}^{2^{g-1}} M_q \cdot e^{2\lambda m_{qi}} \right) \cdot \frac{e^{-2\lambda z_F}}{v_N} \quad (3.44)$$

$$\Psi_{gj} = \prod_{w=g}^{j-1} (1 - K_w) \left(\sum_{q=1}^{2^{g-1}} M_q \cdot e^{-2\lambda m_{qi}} \right) \cdot \frac{1}{v_N} \quad (3.45)$$

La solución del potencial en cualquier estrato E_q originado por una fuente puntual en el estrato E_j , para todo $h_{1,q-1} \leq z \leq h_{1q}$, se puede escribir como:

$$V_{qj} = \frac{\rho_j J_j}{4\pi} \left[\phi_{qj} \cdot e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{qj} \cdot e^{\lambda(z-z_F)} + \delta_{qj} \cdot e^{-\lambda|z-z_F|} \right] J_0(\lambda r) \quad (3.46)$$

Donde:

$$\delta_{qj} = \begin{cases} 0 & q \neq j \\ 1 & q = j \end{cases} \quad (3.47)$$

$J_0(\lambda r)$: función de Bessel de primera clase de orden cero

La solución 3.46 en función del parámetro λ se denominará solución en el *Dominio Espectral*. En las tablas 3.2 y 3.3 se resumen las funciones ϕ , ψ para terrenos de 3 y 4 estratos respectivamente. Obsérvese que para la fuente puntual en cada estrato j existen funciones ϕ_{ij} , ψ_{ij} diferentes para cada estrato i , ($1 \leq i \leq N$). Es decir, para una fuente puntual de corriente ubicada en el estrato j existen diferentes funciones de potencial V_{ij} para cada estrato. A su vez las funciones V_{ij} cambian cuando la fuente puntual de corriente se ubica en un estrato diferente.

Tabla 3. 2 Funciones ϕ_{ij} , ψ_{ij} para un terreno de 3 estratos

	i	Φ_{ij}	Ψ_{ij}
J=1	1	$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + K_1 K_2 e^{-2\lambda(h_2+z_F)} + K_1 e^{-2\lambda h_{11}} + \\ K_2 e^{-2\lambda(h_2+h_{11})} \end{array} \right\} \frac{1}{v_3}$	$\left\{ K_1 e^{-2\lambda h_{11}} + K_2 e^{-2\lambda(h_2+h_{11})} \right\} \frac{1}{v_3}$
	2	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + 1 \right\} \frac{(1+K_1)}{v_3}$	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + 1 \right\} \frac{(1+K_1)K_2 e^{-2\lambda(h_{12}-z_F)}}{v_3}$
	3	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + 1 \right\} \frac{(1+K_1)(1+K_2)}{v_3}$	0
J=2	1	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + K_1 e^{-2\lambda h_{12}} \right\} \frac{(1-K_1)}{v_3}$	$\left\{ 1 + K_2 e^{-2\lambda(h_{12}+z_F)} \right\} \frac{(1-K_1)}{v_3}$
	2	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + K_1 e^{-2\lambda h_{12}} \right\} \frac{(1-K_1)e^{2\lambda h_{12}}}{v_3}$	$\left\{ 1 - K_1 e^{2\lambda z_F} + e^{2\lambda z_F} - K_1 e^{-2\lambda(h_{11}-z_F)} \right\} \frac{K_2 e^{-2\lambda h_{12}}}{v_3}$
	3	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + K_1 e^{-2\lambda h_{11}} \right\} \frac{(1+K_2)}{v_3}$	0
J=3	1	$\frac{(1-K_1)(1-K_1)e^{-2\lambda z_F}}{v_3}$	$\frac{(1-K_1)(1-K_1)}{v_3}$
	2	$\left\{ 1 - K_1 e^{2\lambda h_{11}} \right\} \frac{(1-K_2)e^{-2\lambda z_F}}{v_3}$	$\left\{ 1 - K_1 e^{-2\lambda h_{11}} \right\} \frac{(1-K_2)}{v_3}$
	3	$\left\{ 1 - K_1 e^{2\lambda h_{11}} - K_1 e^{2\lambda h_{12}} + \right. \\ \left. K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12}-h_{11})} \right\} \frac{e^{-2\lambda z_F}}{v_3}$	0
		$v_3 = 1 - K_1 e^{-2\lambda h_{11}} - K_2 e^{-2\lambda h_2} + K_1 K_2 e^{-2\lambda(h_{12}-h_{11})}$	

Tabla 3.3 Funciones Φ_{ij} , Ψ_{ij} para un terreno de 4 estratos

	i	Φ_{ij}	Ψ_{ij}
j=1	1	$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + K_2 K_3 e^{-2\lambda(h_3+z_F)} + \\ K_1 K_2 e^{-2\lambda(h_2+z_F)} + K_1 K_3 e^{-2\lambda(h_2+h_3+z_F)} \\ + K_1 e^{-2\lambda h_{11}} + K_1 K_2 K_3 e^{-2\lambda(h_3+h_{11})} + \\ K_2 e^{-2\lambda(h_2+h_{11})} + K_3 e^{-2\lambda(h_2+h_3+h_{11})} \end{array} \right\} \frac{1}{v_4}$	$\left\{ \begin{array}{l} K_1 e^{-2\lambda h_{11}} + K_1 K_2 K_3 e^{-2\lambda(h_{13}+h_{11})} + \\ K_2 e^{-2\lambda(h_2+h_{11})} + \\ K_3 e^{-2\lambda(h_2+h_3+h_{11})} \end{array} \right\} \frac{(1+e^{2\lambda z_F})}{v_4}$
	2	$\frac{(1+K_1)(1+K_2 K_3 e^{-2\lambda h_3})(1+e^{-2\lambda z_F})}{v_4}$	$\frac{(1+K_1)(K_2+K_3 e^{-2\lambda h_3})(1+e^{-2\lambda z_F})}{v_4}$
	3	$\frac{(1+K_1)(1+K_2)(1+e^{-2\lambda z_F})}{v_4}$	$\frac{(1+K_1)K_1(1+e^{-2\lambda z_F})}{v_4}$
	4	$\frac{(1+K_1)(1+K_2)(1+K_3)(1+e^{-2\lambda z_F})}{v_4}$	0
j=2	1	$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + K_2 K_3 e^{-2\lambda(h_3+z_F)} + \\ + K_2 e^{-2\lambda h_{12}} + K_3 e^{-2\lambda(h_3+h_{12})} \end{array} \right\} \frac{1}{v_4}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 + K_2 K_3 e^{-2\lambda h_3} + \\ + K_3 e^{-2\lambda(h_{12}-z_F)} + K_2 e^{-2\lambda(h_3+h_{12}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{1}{v_4}$
	2	$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + K_2 K_3 e^{-2\lambda(h_3+z_F)} + \\ + K_2 e^{-2\lambda h_{12}} + K_3 e^{-2\lambda(h_3+h_{12})} \end{array} \right\} \frac{(1-K_1 e^{2\lambda h_{11}})}{v_4}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 + e^{2\lambda z_F} \\ - K_1 e^{2\lambda h_{11}} \\ - K_1 e^{2\lambda(h_{11}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{(K_2 e^{-2\lambda h_{12}} + K_3 e^{-2\lambda(h_3+h_{12})})}{v_4}$
	3	$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + 1 - K_1 e^{-2\lambda h_{11}} \\ - K_1 e^{-2\lambda(h_{11}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{(1+K_2)}{v_4}$	$(K_3 e^{-2\lambda(h_{13}-z_F)}) \left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + 1 - K_1 e^{-2\lambda h_{11}} \\ - K_1 e^{-2\lambda(h_{11}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{(1+K_2)}{v_4}$
	4	$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2\lambda z_F} + 1 - K_1 e^{-2\lambda h_{11}} \\ - K_1 e^{-2\lambda(h_{11}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{(1+K_2)(1+K_3)}{v_4}$	0
j=3	1	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + K_3 e^{-2\lambda h_{13}} \right\} \frac{(1-K_1)(1-K_2)}{v_4}$	$\left\{ 1 + K_3 e^{-2\lambda(h_{13}-z_F)} \right\} \frac{(1-K_1)(1-K_2)}{v_4}$
	2	$\left\{ e^{-2\lambda z_F} + K_3 e^{-2\lambda h_{13}} \right\} \frac{(1-K_1 e^{2\lambda h_{11}})(1-K_2)}{v_4}$	$\left\{ 1 + K_3 e^{-2\lambda(h_{13}-z_F)} \right\} \frac{(1-K_1 e^{2\lambda h_{11}})(1-K_2)}{v_4}$
	3	$\left\{ \begin{array}{l} 1 - K_1 e^{2\lambda h_{11}} - K_2 e^{2\lambda h_{12}} + \\ K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12}-h_{11})} \end{array} \right\} \frac{(e^{-2\lambda z_F} + K_3 e^{-2\lambda h_{13}})}{v_4}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 + e^{2\lambda z_F} - K_1 e^{2\lambda h_{11}} - K_1 e^{2\lambda(h_{11}-z_F)} \\ - K_2 e^{2\lambda h_{12}} - K_2 e^{2\lambda(h_{12}-z_F)} + \\ K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12}-h_{11})} + \\ K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12}-h_{11}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{K_3 e^{-2\lambda h_{13}}}{v_4}$
	4	$\left\{ \begin{array}{l} 1 + e^{2\lambda z_F} - K_1 e^{2\lambda h_{11}} - K_1 e^{2\lambda(h_{11}-z_F)} \\ - K_2 e^{2\lambda h_{12}} - K_2 e^{2\lambda(h_{12}-z_F)} + \\ K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12}-h_{11})} + \\ K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12}-h_{11}-z_F)} \end{array} \right\} \frac{(1+K_3)}{v_4}$	0

Tabla 3.3(Cont.) Funciones ϕ_{ij} , ψ_{ij} para un terreno de 4 estratos

	i	Φ_{ij}	Ψ_{ij}
j=4	1	$\frac{(1-K_1)(1-K_2)(1-K_3)e^{-2\lambda z_F}}{v_4}$	$\frac{(1-K_1)(1-K_2)(1-K_3)}{v_4}$
	2	$\frac{(1-K_1e^{2\lambda h_{11}})(1-K_2)(1-K_3)e^{-2\lambda z_F}}{v_4}$	$\frac{(1-K_1e^{-2\lambda h_{11}})(1-K_2)(1-K_3)}{v_4}$
	3	$\left\{ \begin{array}{l} 1-K_1e^{2\lambda h_{11}} - K_2e^{2\lambda h_{12}} + \\ K_1K_2e^{2\lambda(h_{12}-h_{11})} \end{array} \right\} \frac{e^{-2\lambda z_F}(1-K_3)}{v_4}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1-K_1e^{-2\lambda h_{11}} - K_2e^{-2\lambda h_{12}} + \\ K_1K_2e^{-2\lambda(h_{12}-h_{11})} \end{array} \right\} \frac{e^{-2\lambda z_F}(1-K_3)}{v_4}$
	4	$\left\{ \begin{array}{l} 1-K_1e^{2\lambda h_{11}} - K_2e^{2\lambda h_{12}} + \\ K_1K_2e^{2\lambda(h_{12}-h_{11})} - K_3e^{2\lambda h_{12}} + \\ K_1K_3e^{2\lambda(h_{13}-h_{11})} \\ + K_2K_3e^{2\lambda(h_{13}-h_{12})} - \\ K_1K_2K_3e^{2\lambda(h_{12}-h_{12}+h_{11})} \end{array} \right\} \frac{e^{-2\lambda z_F}}{v_4}$	0
		$v_4 = 1 - K_1e^{-2\lambda h_{11}} - K_2e^{-2\lambda h_{12}} + K_1K_2e^{-2\lambda(h_{12}-h_{11})} - K_3e^{-2\lambda h_{13}} + K_1K_3e^{-2\lambda(h_{13}-h_{11})} + K_2K_3e^{-2\lambda(h_{13}-h_{12})} - K_1K_2K_3e^{-2\lambda(h_{13}-h_{12}+h_{11})}$	

3.2 Solución del problema de contorno en el Dominio Geométrico

Para eliminar la dependencia de la solución respecto al parámetro λ se integra la solución (3.46) en el intervalo $1 \leq \lambda < \infty$. La solución en función de las coordenadas z, r se denominará solución en el *Dominio Geométrico*.

$$V_{qj} = \frac{\rho_j J_j}{4\pi} \int_0^\infty [\phi_{qj} e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{qj} e^{\lambda(z-z_F)} + \delta_{qj} e^{-\lambda|z-z_F|}] J_o(\lambda r) d\lambda \quad (3.48)$$

El camino de integración en el plano complejo λ debe garantizar la convergencia de 3.48. Restringir la integración sobre el semieje real $0 \leq \lambda < \infty$ garantiza solución acotada del potencial en $r = 0$, y que la solución no diverja exponencialmente para valores negativos de la parte real de λ .

En general la integral (3.48) no puede resolverse explícitamente[67]. Una alternativa posible es la integración numérica. El obstáculo principal para resolver las integrales que emergen al sustituir las funciones ϕ , ψ en (3.48) lo presenta la función v_N en el denominador. v_N es una sumatoria de funciones exponenciales con exponentes en función del parámetro λ . Una alternativa que se ha encontrado[11] para la solución explícita de (3.48) es aproximar la función $1/v_N$ mediante una sumatoria de funciones exponenciales con exponentes y coeficientes a determinar. Es decir:

$$\frac{1}{v_N} = \sum_{p=0}^M F_p e^{-2\lambda f_p} \quad (3.49)$$

Las funciones ϕ, ψ tienen la forma expuesta en las expresiones (3.32) a (3.45), al sustituir $1/v_N$ de acuerdo a 3.49 se obtiene como resultado una sucesión de funciones exponenciales multiplicadas por $J_o(\lambda r)$ que son de la forma de la integral de Lipschitz, y como tales su integración es directa:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_o(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \quad (3.50)$$

Entonces en el dominio geométrico se puede escribir la solución aproximada del potencial en el estrato E_q originado por una fuente puntual en el estrato E_j de la siguiente forma:

Para el primer estrato $E_1, j \neq 1, j \neq N$:

$$V_{1j} = \frac{\rho_j J_j}{4\pi} \prod_{w=1}^{j-1} (1 - K_w) \sum_{p=0}^M \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(\begin{array}{l} \frac{F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + z + z_F)^2}} + \\ \frac{F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + 2h_{1j}z - z_F)^2}} + \\ \frac{F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + z - z_F)^2}} + \\ \frac{F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + 2h_{1j} - z - z_F)^2}} \end{array} \right) \quad (3.51)$$

Para el estrato $E_j, j \neq N$:

$$V_{jj} = \sum_{q=1}^{2^{j-1}} \sum_{p=0}^M \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(\begin{array}{l} \frac{M_q F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p - 2m_q + z + z_F)^2}} + \\ \frac{M_q F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2h_{1j} + 2f_p - 2m_q + z - z_F)^2}} + \\ \frac{M_q F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + 2h_{1j} - 2m_q - z + z_F)^2}} + \\ \frac{M_q F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2h_{1j} + 2f_p + 2m_q - z - z_F)^2}} \end{array} \right) \quad (3.52)$$

En el último estrato $E_N, j \neq N, \psi_{Nj} = 0$:

$$V_{Nj} = \prod_{w=j}^{N-1} (1 + K_w) \sum_{p=0}^M \sum_{i=1}^{2^{j-1}} \left(\frac{F_p M_i}{\sqrt{r^2 + (2f_p - 2m_i + z + z_F)^2}} + \frac{F_p M_i}{\sqrt{r^2 + (2f_p + 2m_i + z - z_F)^2}} \right) \quad (3.53)$$

Para los estratos $E_g, (1 < g < j)$, por encima del estrato E_j se tiene:

$$V_{gj} = \frac{\rho_j \cdot J_j}{4\pi} \sum_{q=1}^{2^{g-1}} \sum_{p=0}^M \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(\frac{M_q F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p - 2m_q + z + z_F)^2}} + \frac{M_q F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2h_{1j} + 2f_p - 2m_q + z - z_F)^2}} + \frac{M_q F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + 2m_q - z + z_F)^2}} + \frac{M_q F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2h_{1j} + 2f_p + 2m_q - z - z_F)^2}} \right) \quad (3.54)$$

Para los estratos $E_n, (j < n < N)$, por debajo del estrato E_j :

$$V_{nj} = \frac{\rho_j \cdot J_j}{4\pi} \sum_{q=1}^{2^{g-1}} \sum_{p=0}^M \sum_{i=1}^{2^{N-j-1}} \left(\frac{M_q F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p - 2m_q + z + z_F)^2}} + \frac{M_q F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2h_{1j} + 2f_p - 2m_q + z - z_F)^2}} + \frac{M_q F_p A_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2f_p + 2m_q - z + z_F)^2}} + \frac{M_q F_p B_i}{\sqrt{r^2 + (2a_i + 2h_{1j} + 2f_p + 2m_q - z - z_F)^2}} \right) \quad (3.55)$$

Cuando la fuente puntual de corriente está en el estrato más profundo E_N , es decir $j=N$, las expresiones para el potencial en los estratos superiores, E_1 a E_{N-1} , se simplifican notablemente:

$$V_{1N} = \frac{\rho_N \cdot J_N}{4\pi} \prod_{w=1}^{N-1} (1 - K_w) \sum_{p=0}^M \left(\frac{F_p}{\sqrt{r^2 + (2f_p + z + z_F)^2}} + \frac{F_p}{\sqrt{r^2 + (2f_p - z + z_F)^2}} \right) \quad (3.56)$$

$$V_{1N} = \frac{\rho_N \cdot J_N}{4\pi} \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \sum_{p=0}^M \left(\frac{M_q F_p}{\sqrt{r^2 + (2f_p - 2m_q + z + z_F)^2}} \right) \quad (3.57)$$

En los estratos $1 < g < N$ se tiene:

$$V_{gN} = \frac{\rho_N \cdot J_N}{4\pi} \prod_{w=1}^{N-1} (1 - K_w) \sum_{q=1}^{2^{g-1}} \sum_{p=0}^M \left(\frac{M_q F_p}{\sqrt{r^2 + (2f_p - 2m_q + z + z_F)^2}} + \frac{M_q F_p}{\sqrt{r^2 + (2f_p + 2m_q - z + z_F)^2}} \right) \quad (3.58)$$

3.3 Aproximación del factor $1/v_N$ mediante funciones exponenciales

Como se indicó anteriormente un punto clave para obtener la solución del potencial en el problema de contorno propuesto es la aproximación del factor $1/v_N$ mediante funciones exponenciales:

$$\frac{1}{v_N} \approx \sum_{p=0}^{NF} F_p \cdot e^{-2\lambda f_p} \quad (3.59)$$

NF : número de funciones propuesto para aproximar $1/v_N$

El problema es obtener una base de funciones $\exp(-2\lambda f_p)$ que permitan expresar el factor $1/v_N$ como una combinación lineal de estas funciones base. Cuando $\lambda \rightarrow \infty$ el factor $1/v_N \rightarrow 1$, para cumplir con esta condición límite se puede asumir que $F_0=1$ y $f_0=0$. Luego los coeficientes F_p y los exponentes f_p ($p \neq 0$) se pueden obtener mediante algún criterio de optimización para aproximar $1 - (1/v_N) = (1 - v_N)/v_N$. Los exponentes f_p se pueden obtener mediante el método de Prony [29]. Prony observó que los elementos f_p son las raíces de la ecuación característica de una ecuación en diferencias de la forma siguiente:

$$y(j) + C_1 \cdot y(j+1) + C_2 \cdot y(j+2) + \dots + C_n \cdot y(n+1) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.60)$$

Los coeficientes C_n se obtienen utilizando $2n$ puntos para obtener el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} y(2) & y(3) & \dots & y(n+1) \\ y(3) & y(4) & \dots & y(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(n+1) & \dots & \dots & y(2n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(n) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

En forma compacta:

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad (3.62)$$

Donde $y(j+n)$ corresponde a los valores de la función $(1-v_N)/v_N$ en los puntos λ_{j+n} . Si $|\mathbf{Y}| \neq 0$ existe una solución \mathbf{C} de (3.62). En este caso la matriz \mathbf{Y} tiende a ser mal condicionada en la medida que se incrementa el número de puntos, por lo que no es recomendable utilizar un número elevado de puntos. Con los coeficientes C_n determinados se pueden obtener las raíces f_p a partir de la ecuación característica:

$$\xi^n + C_1 \xi^{n-1} + \dots + C_n = 0 \quad (3.63)$$

En general las raíces pueden ser valores complejos, sin embargo de acuerdo a la ubicación de los puntos λ_{j+n} es posible obtener sólo raíces reales. Los valores de las raíces dependen fuertemente de los puntos λ_{j+n} escogidos.

Es oportuno hacer las siguientes consideraciones, la función v_N es una sumatoria de funciones exponenciales $M_i \exp(-2\lambda m_i)$, el primer elemento para $i=1$ corresponde a $M_1=1,0$ y $m_1=0$, entonces a partir de (3.31) se puede escribir:

$$v_N = 1 + \sum_{i=2}^{2^{N-1}} M_i \cdot e^{-2\lambda m_i} \quad (3.64)$$

El factor $(1-v_N)/v_N$ de acuerdo a (3.64) queda expresado de la siguiente forma:

$$\frac{(1-v_N)}{v_N} = \frac{-\sum_{i=2}^{2^{N-1}} M_i \cdot e^{-2\lambda m_i}}{1 + \sum_{i=2}^{2^{N-1}} M_i \cdot e^{-2\lambda m_i}} \quad (3.65)$$

Como se puede observar en (3.65) cuando $\lambda \rightarrow \infty$ el factor $(1-v_N)/v_N$ está gobernado por el elemento $(1-v_N)$ ya que $v_N \rightarrow 1$. Este hecho facilita la aproximación del factor $(1-v_N)/v_N$ mediante funciones exponenciales. En primer lugar de acuerdo a (3.64), $(1-v_N)$ es una sumatoria de funciones exponenciales y es el elemento predominante cuando $\lambda \rightarrow \infty$, entonces es lógico proponer una aproximación que incluya a $(1-v_N)$. Una forma de hacer esto es la siguiente:

$$\frac{1}{v_N} \approx \sum_{p=0}^{NF} F_p \cdot e^{-2\lambda f_p} + F_v (1-v_N) \quad (3.66)$$

Conocidas las raíces f_p existen diferentes alternativas para determinar los coeficientes F_p y el coeficiente F_v . Se ha optado por el método de Galerkin[39] para ponderar los residuos originados por la aproximación (3.66). Es decir:

$$\int_0^\infty e^{-2f_p \lambda} \cdot R(\lambda) \cdot d\lambda = 0 \quad (3.68)$$

Donde:

$$R(\lambda) = \frac{1-v_N}{v_N} - \sum_{p=1}^{NF} F_p \cdot e^{-2f_p \lambda} - F_v (1-v_N) \quad (3.69)$$

Mediante la aplicación sucesiva de (3.68) para cada factor $\exp(-2f_p\lambda)$ y el factor $(1-v_N)$ se obtiene un sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.70)$$

\mathbf{P} es una matriz simétrica $(NF+1)\times(NF+1)$ formada por los siguientes elementos:

Para $i=1\dots NF, j=1\dots NF$:

$$P_{ij} = \int_0^\infty e^{-2f_j u} e^{-2f_i u} du \quad (3.71)$$

Para $i=NF+1, j=NF+1$:

$$P_{ij} = \int_0^\infty e^{-2\lambda f_i u} (1-v_N) du \quad (3.72)$$

Para $i=1\dots NF$

$$G_i = \int_0^\infty \frac{(1-v_N) e^{-2f_j u}}{v_N} du \quad (3.73)$$

Para $i=NF+1$:

$$G_i = \int_0^\infty \frac{(1-v_N)^2}{v_N} du \quad (3.74)$$

Las integrales correspondientes a los valores G_i se pueden evaluar numéricamente.

Para ilustrar el procedimiento de aproximación, se muestra en la figura 3.2 un modelo de un terreno de cinco estratos obtenido a partir de mediciones de campo.

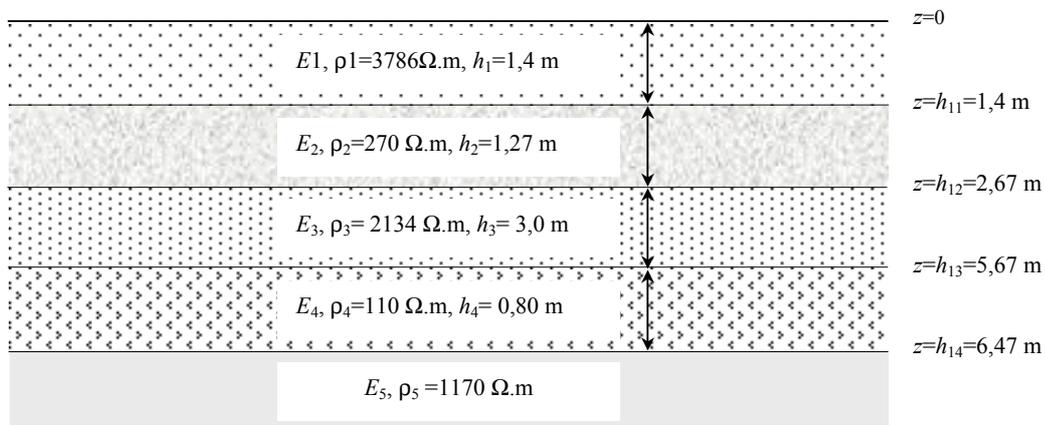


Fig. 3.2 Modelo de un terreno de cinco estratos

La función v_5 correspondiente a este terreno es la siguiente:

$$v_5 = 1 + 0,8669e^{-0,2164(2\lambda)} - 0,7754e^{-0,4127(2\lambda)} - 0,6721e^{-0,1963(2\lambda)} + \\ 0,9020e^{-0,8764(2\lambda)} + 0,7819e^{-0,6600(2\lambda)} - 0,6994e^{-0,4637(2\lambda)} - 0,6062e^{-0,6801(2\lambda)} - \\ 0,8281e^{-1,0(2\lambda)} - 0,7179e^{-0,7836(2\lambda)} + 0,6421e^{-0,5873(2\lambda)} + 0,55666e^{-0,8037(2\lambda)} - \\ 0,7469e^{-0,1236(2\lambda)} - 0,6475e^{-0,3400(2\lambda)} + 0,5792e^{-0,5363(2\lambda)} + 0,5020e^{-0,3199(2\lambda)}$$

Como aproximación para $(1-v_5)/v_5$ se obtuvo:

$$\frac{(1-v_5)}{v_5} \approx 2,1096e^{-0,4137(2\lambda)} + 34,8542e^{-1,0190(2\lambda)} - 50,04546e^{-1,1393(2\lambda)} + 18,3260e^{-1,3677(2\lambda)} + \\ 1,1308(1-v_5)$$

Los exponentes en las funciones exponenciales de v_5 y la aproximación correspondiente a $(1-v_5)/v_5$ están divididos por el factor $h_{14} = 6.47$ m. En la figura 3.3(a) se muestran las curvas de la función $(1-v_5)/v_5$ y su aproximación, y en la figura 3.3(b) el error porcentual entre ambas. Obsérvese que las curvas en 3.3(a) prácticamente se confunden.

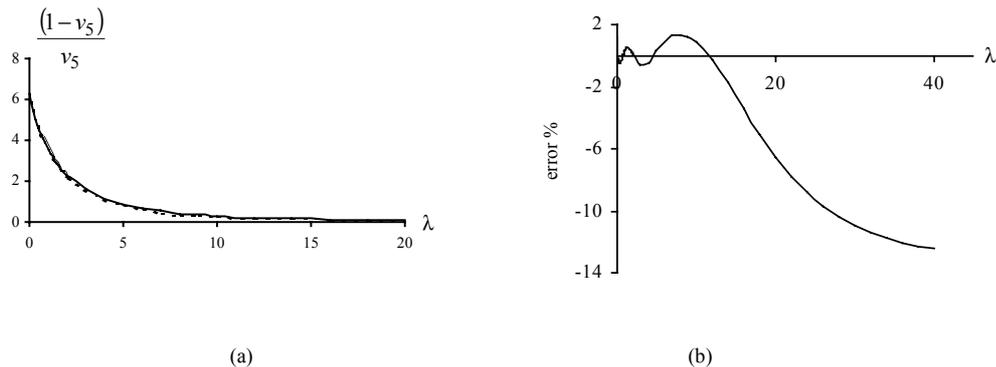


Fig. 3.3 (a) Función $(1-v_5)/v_5$ y aproximación mediante funciones exponenciales
(b) Error porcentual entre $(1-v_5)/v_5$ y la aproximación

Un ejemplo de aplicación para determinar la resistencia de un barra vertical en un terreno de tres estratos se describe a continuación. El terreno se muestra en la figura 3.4.

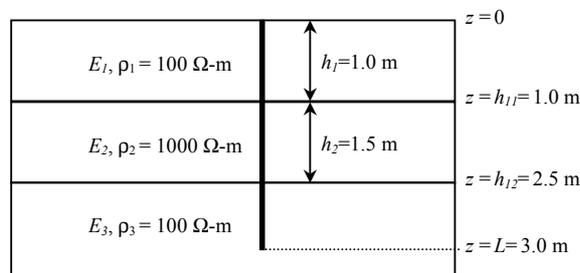


Fig. 3.4 Terreno de tres estratos y barra vertical de longitud $L= 3.0$ m, radio $a = 0.5$ cm

La función v_3 es:

$$v_3 = 1 - 0.81818e^{-0.4u} + 0.81818e^{-u} - 0.66942e^{-0.6u}$$

La aproximación FA para $1/v_3$ es:

$$FA = \sum_{p=1}^8 F_p e^{-f_p u}$$

F_p y f_p están dadas en la tabla 3.4. Se ha hecho el cambio de variable, $u = 2\lambda h_{12}$, este cambio de variable se utiliza para dividir cada h_{1q} por h_{1N-1} . Los valores de f_p en la tabla 3.4 deben ser multiplicados por $h_{12} = 2.5$ m para que puedan ser utilizados en las expresiones (3.51) a (3.58).

Tabla 3.4 Valores F_p y f_p para el terreno de la Fig. 3.4

p	F_p	f_p
1	1.0	0.0
2	1.12800	0.79745
3	1.19729	1.15705
4	-0.49051-j1.06974	-1.86479+ j0.71754
5	-0.49051+j1.06974	-1.86479-j0.71754
6	0.80783	0.4
7	-0.80783	1.0
8	0.66095	0.6

La Fig. 3.5(a) muestra las curvas para $1/v_3-1$ y $FA-1$, ambas curvas casi coinciden. En la Fig. 3.5(b) se muestra el error entre ellas en porcentaje de $(1/v_3-1)$. Un error máximo de 1.27 % ocurre para $u > 20$.

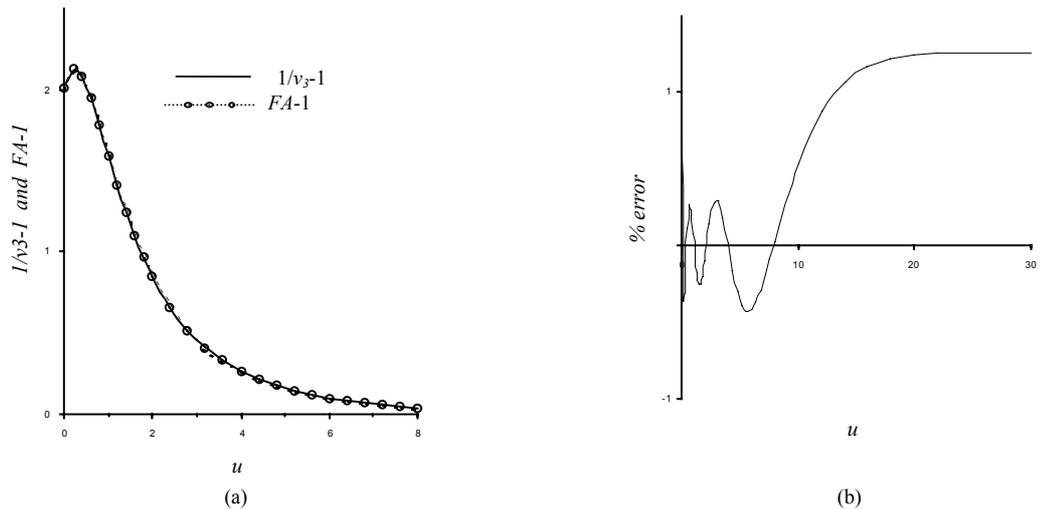


Fig. 3.5. (a) Curvas para $1/v_3-1$ y $FA-1$ v.s u
(b) % error: $100(1-v_3FA)/(1-v_3)$ v.s u

Una fuente puntual de corriente en E_1 en $z_F = 0.5$ m, genera las siguientes funciones de potencial:

$$V_{11} = \frac{\rho_1 J_1}{4\pi} \left\{ \frac{C_9}{R_9} + \sum_{p=0}^7 F_p \left[\sum_{k=1}^8 \frac{C_k}{R_k} \right] \right\}$$

$$V_{21} = \frac{\rho_1 J_1 (1 + K_1)}{4\pi} \left\{ \sum_{p=0}^7 F_p \left[\frac{C_1}{R_1} + \frac{C_6}{R_6} + \frac{C_9}{R_9} + \frac{C_7}{R_7} \right] \right\}$$

$$V_{31} = \frac{\rho_1 J_1 (1 + K_1)(1 + K_2)}{4\pi} \left\{ \sum_{p=0}^7 F_p \left[\frac{C_1}{R_1} + \frac{C_9}{R_9} \right] \right\}$$

C_k y R_k están dados en la tabla 3.5.

Tabla 3.5

k	C_k	R_k
1	1.0	$\sqrt{r^2 + (2f_p + z + z_F)^2}$
2	K_1	$\sqrt{r^2 + (2.0 + 2f_p + z - z_F)^2}$
3	K_1	$\sqrt{r^2 + (2.0 + 2f_p - z + z_F)^2}$
4	K_1	$\sqrt{r^2 + (2.0 + 2f_p - z - z_F)^2}$
5	K_2	$\sqrt{r^2 + (5.0 + 2f_p + z - z_F)^2}$
6	K_2	$\sqrt{r^2 + (5.0 + 2f_p - z + z_F)^2}$
7	K_2	$\sqrt{r^2 + (5.0 + 2f_p - z - z_F)^2}$
8	$K_2 K_1$	$\sqrt{r^2 + (3.0 + 2f_p + z + z_F)^2}$
9	1.0	$\sqrt{r^2 + (2f_p + z - z_F)^2}$

En la figura 3.6 se muestra el potencial en función de la profundidad z , para diferentes distancias r de la fuente de corriente. La continuidad del potencial se preserva para los cambios de estrato para $z=1.0$ m y $z=2.5$. V_{11} , V_{21} , V_{31} satisfacen las condiciones de contorno (3.2) - (3.4).

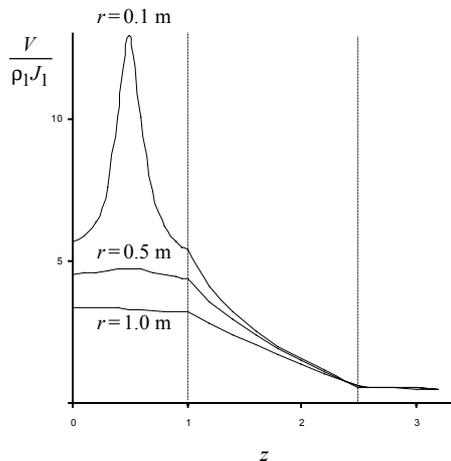


Fig. 3.6 Voltaje en el terreno v.s z

El análisis de la resistencia a tierra de una barra vertical fue hecho en el terreno de la Fig. 3.4. Las expresiones deducidas fueron utilizadas para determinar el valor de la resistencia a tierra mediante el método del potencial promedio[31]. La variación de la resistencia en función de la profundidad de penetración se muestra en la figura 3.7 para terrenos de tres y dos estratos. Los terrenos de dos estratos han sido introducidos como referencias con fines de comparación. Obviamente a medida que la barra penetra en el terreno el valor de la resistencia a tierra disminuye. Para el terreno de tres estratos el valor de la resistencia decrece desde $R=152 \Omega$, para $L=0.6 \text{ m}$, a $R=62 \Omega$ para $L=3.0 \text{ m}$.

Sin embargo para el terreno de tres estratos, figura 3.7 curva 1, el valor de la resistencia decrece lentamente cuando la barra atraviesa el segundo estrato de alta resistividad. en comparación con la variación mas pronunciada que se observa en los estratos 1 y 3. Este es un resultado esperado, la contribución del sección de longitud comprendida en el segundo estrato es prácticamente nula en la disminución del valor de la resistencia a tierra. La misma conclusión es extensiva a los terrenos de dos estratos cuando la barra vertical penetra en los estratos de elevada resistividad. Obsérvese que para estratos con la misma resistividad, la variación de la resistencia para los terrenos de dos estratos es similar a la de tres estratos. Así se observa en la curva 2 que la variación de la resistencia es casi paralela a la curva 1, especialmente cuando la barra alcanza el segundo estrato E_2 . En la medida que la barra vertical se encuentra en el estrato E_1 del terreno de tres estratos, la curva 1 es muy similar a la curva 3.

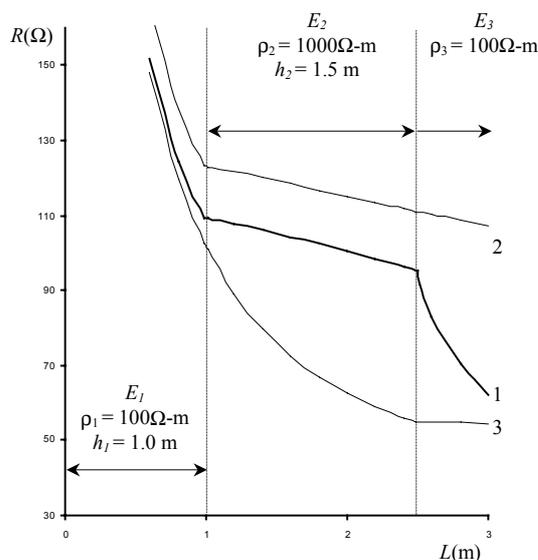


Fig. 3.7 Variación de la resistencia R en función de la profundidad de penetración L

Curva 1: Terreno de tres estratos, ver Fig. 3.4

Curva 2: Terreno de dos estratos, $h=1.0 \text{ m}$, $\rho_1=100 \Omega\text{-m}$, $\rho_2=1000 \Omega\text{-m}$

Curva 3: Terreno de dos estratos, $h=2.5 \text{ m}$, $\rho_1=100 \Omega\text{-m}$, $\rho_2=1000 \Omega\text{-m}$

En la figura 3.8 se muestra la variación de la resistencia a tierra en función de la relación ρ_2/ρ_3 de una barra vertical de longitud $L=3.0 \text{ m}$, y radio $a=0.005 \text{ m}$. La resistividad y espesor de los primeros dos estratos E_1, E_2 se mantuvieron igual que los del terreno de tres estratos de la figura 3.4. La resistividad del tercer estrato ρ_3 se varió desde un valor de $100 \Omega\text{-m}$ hasta $1000 \Omega\text{-m}$. Se observa claramente que a medida que la relación $\rho_3/\rho_2 \rightarrow 1$, es decir $\rho_2 \rightarrow \rho_3$, el valor de la

resistencia a tierra se incrementa hasta el valor R_o . Donde R_o es el valor de resistencia a tierra de una barra vertical de 3 m de longitud enterrada en un terreno de dos estratos con $\rho_1 = 100 \Omega\text{-m}$, $\rho_2=1000 \Omega\text{-m}$ y un espesor del primer estrato $h = 1.0 \text{ m}$.

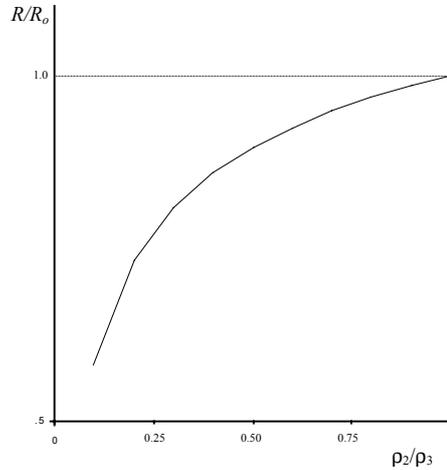


Fig. 3.8 Resistencia a tierra en función de la relación ρ_2/ρ_3

3.4 Aproximación de la función $1/v_2$ para terrenos biestratificados

En el caso de terrenos dos estratos, ver figura 3.9, la aproximación mediante funciones exponenciales se simplifica debido a que la función $1/v_2$ es simplemente:

$$\frac{1}{v_2} = (1 - K \cdot e^{-2\lambda h})^{-1} \quad (3.75)$$

donde:

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (3.76)$$

La función $(1-v_2)/v_2$ es:

$$\frac{K \cdot e^{-u}}{1 - K \cdot e^{-u}} \approx \sum_{j=1}^N F_j \cdot e^{-\zeta_j u} + F_v (1 - v_2) \quad (3.77)$$

Donde $u=2\lambda h$. Este cambio de variable elimina la dependencia de los factores F_j y los exponentes ζ_j del espesor h del estrato superior. Las raíces f_j para cualquier valor de h se obtienen simplemente como $f_j = 2h\zeta_j$.

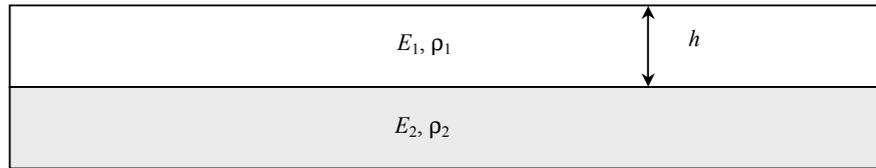


Fig. 3.9 Terreno biestratificado

Aplicando el procedimiento descrito en el numeral anterior, se obtuvieron los valores indicados en la tabla 3.6 para diferentes valores de la relación ρ_2/ρ_1 .

Tabla 3.6 Coeficientes F_j y las raíces modificadas ζ_j para diferentes valores de ρ_2/ρ_1

ρ_2/ρ_1	F_1	F_2	F_3	ζ_1	ζ_2	ζ_3	F_v
0.010	0,242332+ j0,57956	0,242332- j0,57956	-	2,062547- j0,245007	2,062547+ j0,245007	-	1,00048
0.020	0,235208+ j0,594678	0,235208- j0,594678	-	2,071382- j0,233208	2,071382+ j0,233208	-	1,00062
0.050	0,214925+ j0,670788	0,214925- j0,670788	-	2,097567- j0,192355	2,097567+ j0,192355	-	1,0010
0.075	0,199192+ j0,817522	0,199192- j0,817522	-	2,119026- j0,148354	2,119026+ j0,148354	-	1,0014
0.100	0,184446+ j1,402827	0,184446- j1,402827	-	2,140163- j0,811280	2,140163+ j0,811280	-	1,0017
0.200	0,490482	-0,222330	-	1,978554	2,464737	-	1,0028
0.300	0,271738	-0,081517	-	1,937631	2,659422	-	1,0036
0.400	0,164116	-0,033861	-	1,917478	2,824898	-	1,0041
0.500	0,098296	-0,013564	-	1,906080	2,973843	-	1,0042
0.600	0,055668	-0,004651	-	1,899344	3,110990	-	1,0040
0.700	0,028162	-0,001062	-	1,895364	3,238751	-	1,0034
0.800	0,011385	0,000026	-	1,893130	3,35867	-	1,0025
0.900	0,002611	0,000010	-	1,892050	3,471466	-	1,0014
1.100	0,002238	0,000227	-	1,891982	3,680248	-	0,9984
2.00	0,147014	0,018903	-	2,178454	5,687200	-	1,0039
3.00	0,399264	0,106660	-	2,241743	6,596960	-	0,9964
4.00	0,696381	0,202852	-	2,477758	8,233169	-	1,0172
5.00	0,431313	0,762828	0,147195	1,916788	3,867762	12,60432	0,9975
6.00	0,497148	1,041833	0,252408	1,949086	4,011862	13,74422	1,0088
7.00	-0,019148	1,020679	1,213926	1,376144	2,235338	6,37200	1,0035
8.00	-0,042727	1,225171	1,480512	1,399213	2,321720	6,98455	1,0218
9.00	-0,011293	1,317244	1,826860	1,400433	2,344976	7,28201	1,0053
10.00	0,003502	1,440570	2,153244	1,412300	2,393627	7,68494	1,0015
15.00	0,042799	2,151764	3,716400	1,524603	2,751457	10,05871	1,0284
20.00	0,203331	2,669573	5,367847	1,637375	3,099992	12,12320	1,0205
30.00	0,623643	3,507223	8,722750	1,856887	3,820320	15,97718	1,8054
40.00	1,040807	4,253227	12,10386	2,049749	4,527377	19,61205	1,0036
60.00	1,751886	5,817074	18,82597	2,379718	5,918524	26,84091	1,0303
80.00	2,334322	7,686100	25,42542	2,673671	7,354528	34,64302	1,0792
100.0	2,848488	8,599150	32,49822	2,834615	8,219511	39,58926	1,0712

3.5 Sistemas de conexión a tierra en terrenos homogéneos no planos

Las expresiones desarrolladas para el diseño de los sistemas de conexión a tierra, han sido hechas asumiendo que el terreno en el cual se encuentra ubicado el sistema de conexión a tierra es completamente plano [20,31,60]. Sin embargo existen países ubicados sobre zonas geográficas tales, que tienen una parte sustancial de su territorio ubicado en zonas montañosas, como por ejemplo la mayoría de los países suramericanos que se encuentran ubicados sobre la Cordillera de los Andes. Hasta el momento no se tiene conocimiento de algún estudio que determine hasta que punto la solución obtenida para un terreno plano puede extenderse para terrenos de superficie irregular. O cual es el efecto de la presencia de irregularidades en la superficie del terreno sobre la resistencia o los perfiles de voltaje sobre el terreno. Mediante la solución propuesta en forma integral para dominios cuneiformes, es posible tener un primera aproximación del efecto de estas irregularidades, asumiendo que se pueden representar mediante una cuña de longitud infinita. Por ejemplo en la figura 3.10 se muestran tres casos típicos de un sistema de conexión a tierra en una localidad de una geografía montañosa.

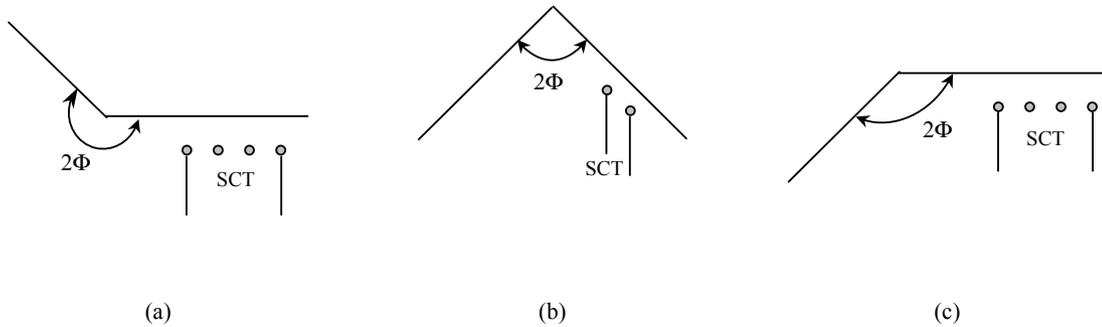


Fig. 3.10 Casos típicos de Sistemas de Conexión a Tierra(SCT) en localidades montañosas

Para conocer el efecto de la irregularidades del terreno, asumidas como una cuña de longitud infinita a lo largo del eje z , es conveniente estudiar como se comporta la distribución de potencial cuando se asume una fuente puntual de corriente ubicadas en las coordenadas r_o, φ_o respecto al vértice y la bisectriz de la cuña. El problema a resolver es el mismo problema de potencial (2.1) que se planteó en el capítulo 2, con la condición de contorno (2.4), $\partial V/\partial \mathbf{n}=0$ para $\varphi=\pm\Phi$. Para bajas frecuencias se asume la ecuación de Laplace. La distribución de potencial en el dominio cuneiforme está dada por:

$$V(r, \varphi, r_o, \varphi_o) = c \int_{\gamma} K(r, r_o, \alpha, z, z_o) H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) d\alpha \quad (3.78)$$

Donde c es una constante igual a $J\rho/4\pi$, J es la densidad de corriente asociada a la fuente puntual de corriente, ρ es la resistividad del terreno. γ es un camino de integración en el plano complejo α . El núcleo $K(r, r_o, \alpha, z, z_o)$ satisface la ecuación de Laplace y es igual a $1/R$, donde $R^2 = r^2 + r_o^2 - 2r \cdot r_o \cos(\alpha) + (z-z_o)^2$. La función $H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi)$ es:

$$H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) = Ctg(\zeta_1) + Ctg(\zeta_2) \quad (3.79)$$

$$\zeta_1 = \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \varphi - \varphi_o) \quad (3.80)$$

$$\zeta_2 = \frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \varphi + \varphi_o - 2\Phi) \quad (3.81)$$

Perfil de voltajes sobre el terreno asociado a una fuente puntual de corriente

Sea una fuente puntual de corriente ubicada en un terreno de la forma que se indica en la figura 3.11.

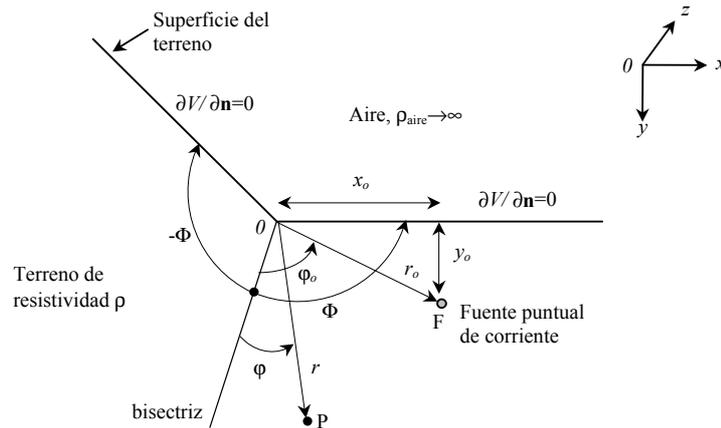


Fig. 3.11 Fuente puntual de corriente inmersa en un terreno homogéneo de resistividad ρ , formando una cuña de ángulo 2Φ

El potencial en un punto $P(r, \varphi, z)$ está determinado mediante (3.78). Sobre la superficie del terreno $\varphi = \pm\Phi$. En la figura 3.12 se muestran diferentes perfiles de voltaje para diferentes ángulos Φ de la cuña y para una fuente puntual de corriente ubicada a una distancia $x_o = 1,0$ m del vértice de la cuña. El voltaje V es tomado respecto a una referencia muy lejana, y está normalizado respecto al valor máximo que ocurre cuando $r = x_o$.

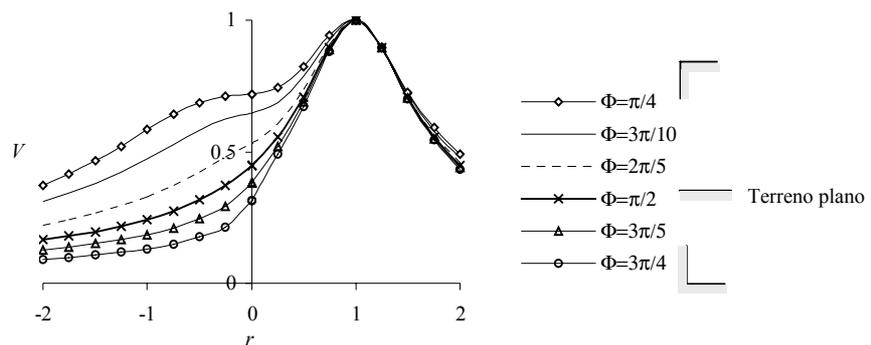


Fig. 3.12 Perfil de voltajes sobre la superficie del terreno para una fuente puntual de corriente ubicada a una distancia $x_o = 1,0$ m del vértice de la cuña. En el eje horizontal r negativo indica que está sobre la frontera $-\Phi$

Obviamente existe una marcada asimetría originada por la presencia del vértice de la cuña que da origen a la difracción del vector densidad de corriente hacia la zona $0 \geq \varphi \geq -\Phi$. Para ángulos $\Phi > \pi/2$ el volumen de terreno se incrementa lo que permite un mayor flujo de corriente hacia éste volumen adicional, por el contrario para $\Phi < \pi/2$ la circulación de corriente se ve restringida por la

frontera. Esto se traduce en una mayor densidad de corriente en el terreno para el primer caso, lo que implica un mayor gradiente de potencial, y por ende una mayor variación del potencial. Obsérvese que para el caso extremos $\Phi=\pi/4$, la variación de potencial en la superficie es menor pronunciada que para el otro caso extremo $\Phi=3\pi/4$. Para $r>1$ sobre la frontera Φ la diferencia entre los perfiles de voltaje sobre el terreno se reduce notablemente.

Resistencia a tierra de un electrodo lineal

Otro aspecto que se estudió fue la variación de la resistencia a tierra de un electrodo lineal, entendiéndose como electrodo lineal un cilindro de material conductor cuyo radio a es mucho menor que su longitud L . En la figuras 3.13 se muestra la variación de la resistencia a tierra de un electrodo lineal de 4,0 m de longitud en función del ángulo Φ . La resistencia se ha normalizado respecto a la resistencia R_0 que tiene el electrodo en un terreno plano.

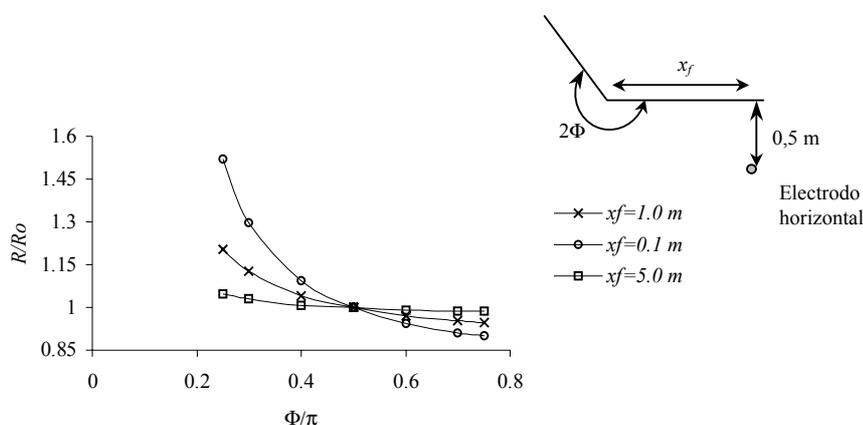


Fig. 3.13 Resistencia a tierra R en función del ángulo Φ , para un electrodo horizontal de longitud $L=4,0$ m, radio $a= 0,005$ m, enterrado a una profundidad de 0,5 m, paralelo al vértice de la cuña. R_0 resistencia obtenida para un terreno homogéneo plano

Como es de esperar, en la medida que la distancia x_f , desde el vértice de la cuña al electrodo, se incrementa el valor de la resistencia tiende al valor R_0 . Es decir el efecto de la difracción originado por el vértice se reduce. La resistencia se determinó utilizando el concepto de potencial promedio, en este caso la integración es directa porque electrodo es paralelo al borde de la cuña, y la integración en el contorno γ no se ve afectada por la integración a lo largo de z . Es decir la variable z en la distancia R no está interrelacionada con el parámetro de integración α .

Sistemas de Conexión a Tierra compuesto por electrodos lineales

Es práctica común construir sistemas de conexión a tierra en forma mallada, generalmente con mallas regulares de forma cuadrada o rectangular. En este caso se propone la utilización del método de colocación de puntos para resolver el problema de contorno: determinar la distribución de la corriente que se inyecta al terreno, bajo la condición de equipotencialidad en los electrodos lineales, y derivada normal nula del potencial en la superficie del terreno. La equipotencialidad en los electrodos lineales puede asumirse siempre y cuando la resistividad del material del electrodo sea mucho menor que la del terreno. El método de colocación de puntos ha sido tradicionalmente utilizado para la solución de problemas de contorno[8,30,44,50]. Para la

integración respecto a las variables x o y , involucradas en las distancias coordenadas polares r , φ , se recurre a la doble integración numérica: primero a lo largo del contorno γ y posteriormente a lo largo de la variable x o y . Por ejemplo para un electrodo lineal paralelo al eje x , la distancia r_o y el ángulo φ_o varían a lo largo del electrodo, ver figura 3.14.

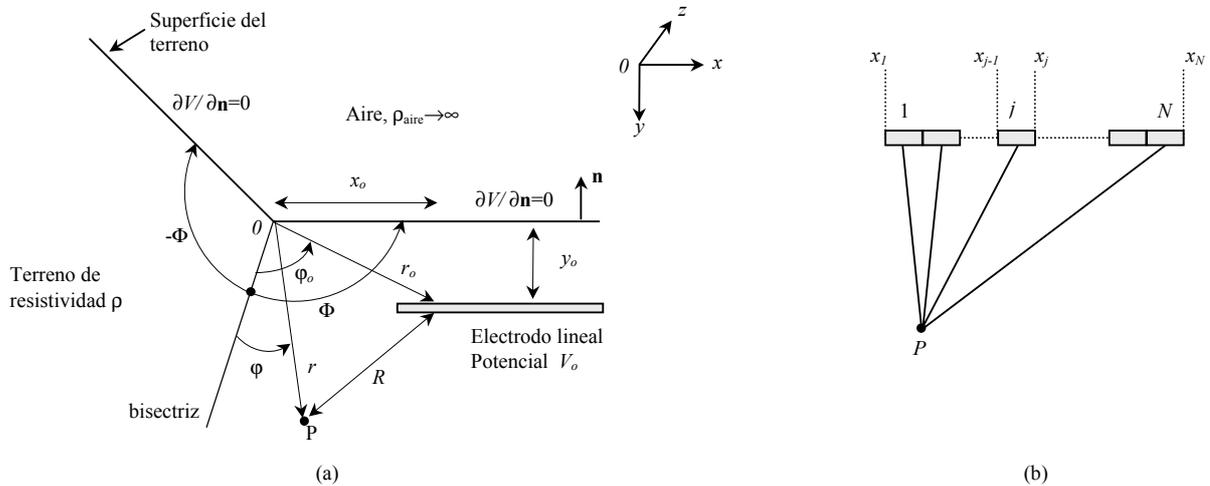


Fig. 3.14 Electrodo lineal paralelo al eje x

La estrategia para aplicar el método de colocación de puntos es simple. En primer lugar se subdivide el electrodo lineal en un número N de secciones. Cada sección aportará una contribución al potencial en el punto P , potencial originado por la cantidad de corriente I_j que inyecta cada sección i del conductor al terreno. Hasta el momento esta cantidad de corriente I_j se desconoce. La contribución de cada sección está determinada por la integral de (3.78) entre los puntos inicial y final de cada sección: x_{j-1} , x_j , o lo que es lo mismo en coordenadas polares respecto al vértice de la caña, entre r_{j-1} , φ_{j-1} y r_j , φ_j . Para determinar las cantidades de corriente I_j basta llevar el punto P a la superficie cilíndrica del electrodo lineal y plantear el correspondiente sistema lineal de ecuaciones para las I_j . Es decir:

$$\mathbf{CI} = \mathbf{V}_o \quad (3.82)$$

Donde:

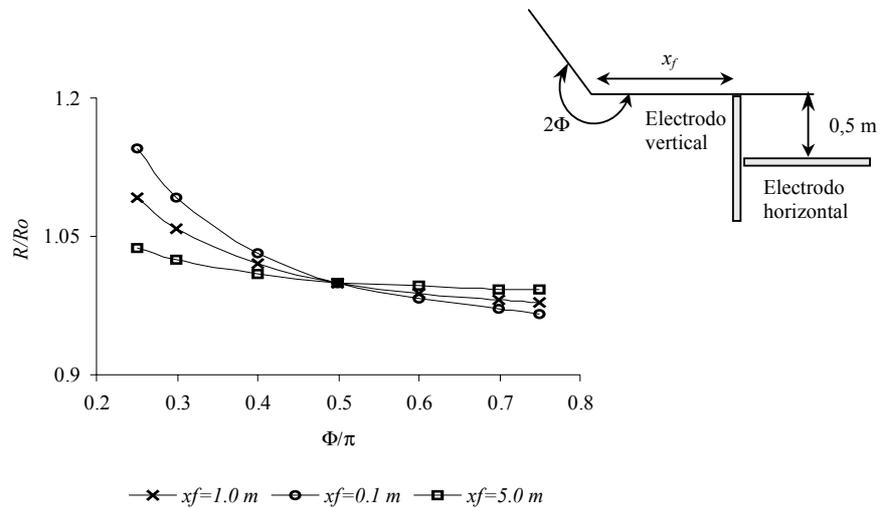
$$C_{ij} = c_j \int_{\gamma} \int_{x_1}^{x_N} K(r_i, r_j, \alpha, z_i, z_j) H(\alpha, \varphi_i, \varphi_j, \Phi) dx d\alpha \quad (3.83)$$

$$c_j = \frac{\rho J_j}{4\pi} \quad (3.84)$$

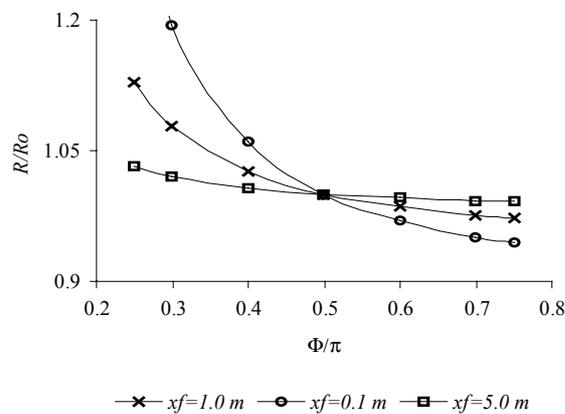
$$J_j = \frac{I_j}{|x_j - x_{j-1}|} \quad (3.85)$$

Cuando $i=j$ en (3.85) y (3.83), se hace $x_j - x_{j-1} = a$, siendo a el radio del conductor cilíndrico del electrodo lineal. Para la condición $a \ll y_o$ la densidad de corriente en la superficie del conductor

cilíndrico se puede asumir constante en su circunferencia, la asimetría debida a la presencia de la superficie del terreno es despreciable bajo esta condición. Mediante éste método se determinaron la resistencia a tierra para un electrodo horizontal de 4,0 m de longitud ubicado en la dirección del eje x , y para un electrodo o barra vertical de 2,0 m de longitud ubicado a ras de la superficie. En la figura 3.15 se muestran los resultados de la resistencia a tierra en función del ángulo Φ , para diferentes separación x_f del vértice de la cuña. La resistencia se ha normalizado respecto a la resistencia R_o que tiene el mismo electrodo en un terreno plano.



(a)



(b)

Fig. 3.15 Resistencia a tierra R en función del ángulo Φ ,
 (a) Electrodo horizontal longitud $L=4,0$ m, radio $a= 0,005$ m
 (b) Electrodo vertical longitud $L=2,0$ m, radio $a= 0,005$ m
 R_o resistencia obtenida para un terreno homogéneo plano

La ecuación (3.82) para un sistema de conexión a tierra mallado debe incluir el efecto mutuo entre los diferentes electrodos que conforman cada malla del sistema. Así se tienen electrodos lineales paralelos y horizontales sobre el mismo plano horizontal a una profundidad y_o , o en planos horizontales paralelos a diferente profundidad. También se presenta el caso de electrodos

lineales verticales paralelos, y perpendiculares a conductores horizontales. En cada caso el efecto mutuo C_{ij} se determina mediante (3.83) con la integración en la variable correspondiente. Este proceso es laborioso desde el punto de vista computacional por la doble integración requerida, y por el seccionamiento de cada electrodo lineal que conforma cada malla del sistema. En la figura 3.16 se ilustran los casos más comunes en los sistemas de conexión a tierra utilizados en la práctica.

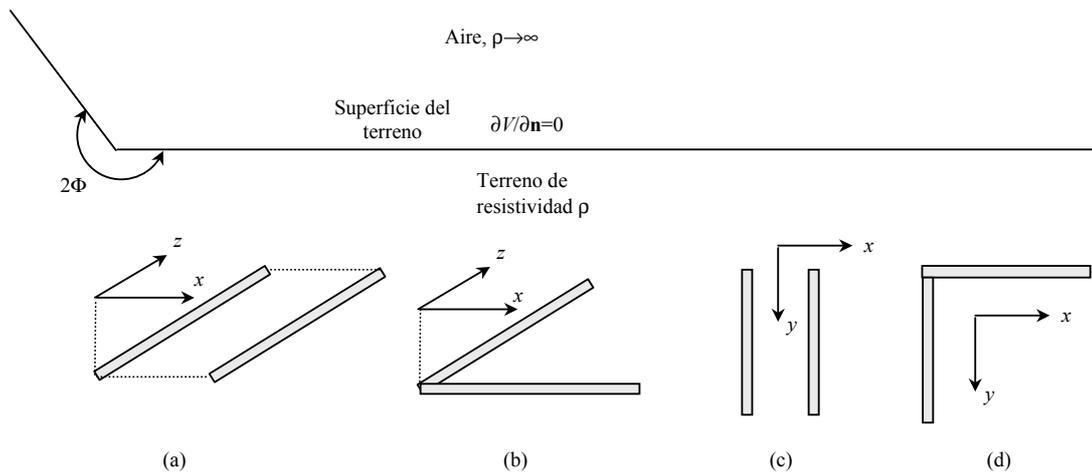


Fig. 3. 16 Cuatro casos más comunes de electrodos lineales en la construcción de sistemas de conexión a tierra
 (a) Electrodos horizontales paralelos
 (b) Electrodos horizontales perpendiculares
 (c) Electrodos verticales paralelos
 (d) Electrodo vertical perpendicular a electrodo horizontal

Para ilustrar el caso de un sistema mallado se determinaron los valores de resistencia a tierra para una malla 4x4 m ubicada a una separación del vértice $x_f = 0,1$ m, y para ángulos Φ : $0,4\pi$; $0,5\pi$ y $0,6\pi$. Los valores de resistencia obtenidos y expresados en función del valor de resistencia para terreno plano ($0,5\pi$) fueron los siguientes: para $0,4\pi$ se obtuvo 1,042 y para $0,5\pi$ se obtuvo un valor de 0,94. Lo que evidencia la influencia del vértice de la cuña el valor de la resistencia para valores de $\Phi > 0,5\pi$ disminuye respecto al valor correspondiente a $0,5\pi$, por el contrario este valor se incrementa cuando $\Phi < 0,5\pi$. El valor de la resistencia a tierra multiplicado por la corriente inyectada al terreno por intermedio del sistema de conexión a tierra, determina la elevación del potencial de tierra (EPT) respecto a una referencia muy lejana. La diferencia entre éste valor y el potencial distribuido en la superficie del terreno, debido a esta corriente y su distribución en el sistema de conexión a tierra, es lo que define las posibles situaciones de riesgo para las personas sobre la superficie del terreno sobre el sistema de conexión a tierra, o en sus adyacencias.

En la figura 3.17 se muestran diferentes perfiles de voltaje correspondientes a diferentes ángulos Φ de la cuña. La figura 3.16(a) corresponde a un conductor horizontal paralelo al vértice de la cuña, y la figura 3.16(b) a una malla 4x4 m. Los conductores de la malla paralelos al eje z se encuentran ubicados en $x=0,1$ m y $x=4,1$ m, los conductores paralelos al eje x se encuentran ubicados en $z=0$ y $z=4,0$ m. El perfil de voltajes se determino en puntos sobre la superficie ($\varphi = \pm\Phi$), en la dirección x y para $z=2,0$ m, es decir por el centro de la malla y

perpendicular al vértice de la cuña. La profundidad de la malla es $y=0,5$ m y el radio de los conductores $a=0,005$ m.

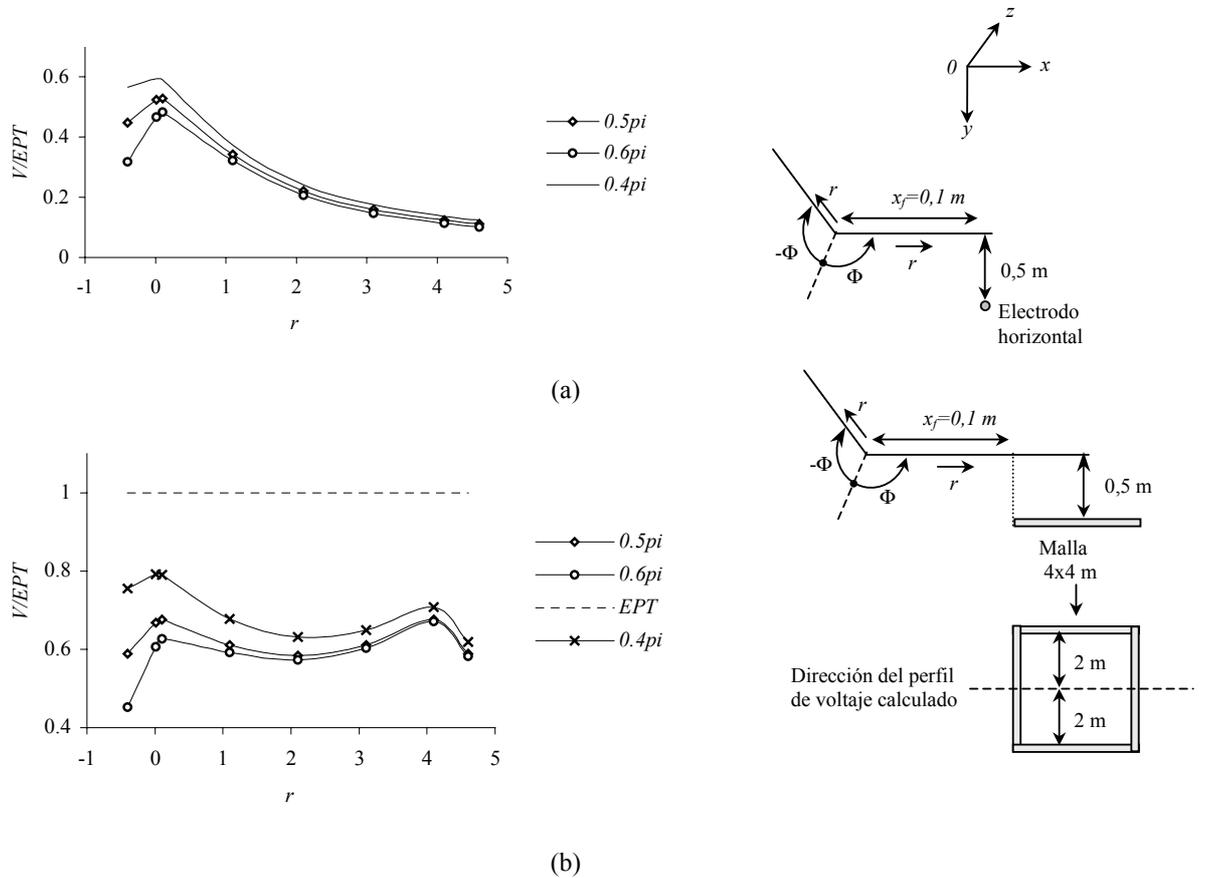


Fig. 3. 17 Perfiles de voltaje sobre la superficie del terreno en la dirección de r y para $z=2$ m.

El signo negativo en la escala horizontal indica que la distancia r se mide hacia $-\Phi$,

(a) Electrodo horizontal paralelo al vértice de la cuña, eje z

(b) Malla 4x4 m

Es evidente que debido a la cercanía del vértice de la cuña el perfil de voltaje se afecta en comparación al perfil obtenido para un terreno plano $\Phi=0,5\pi$. Desde el punto de vista de la seguridad de las personas la diferencia de potencial $EPT-V$ es mayor para terrenos que presentan los ángulos $\Phi>0,5\pi$, debido a que se incrementa la difusión de corriente hacia la zona de mayor volumen de terreno. En la tabla 3.7 se muestra la relación $V_c=(EPT-V)/EPT$ para diferentes ángulos Φ , y los puntos sobre la superficie del terreno correspondientes a la figura 3.17.

Tabla 3.7

r	V_c	V_c	V_c
	$\Phi=0,5\pi$	$\Phi=0,6\pi$	$\Phi=0,4\pi$
-0,4	0,4108	0,5471	0,2449
0,01	0,3323	0,3932	0,2084
0,1	0,3240	0,3733	0,2101
1,1	0,3895	0,4073	0,3229
2,1	0,4162	0,4276	0,3689
3,1	0,3892	0,3971	0,3506
4,1	0,3240	0,3291	0,2917
4,6	0,4108	0,4167	0,3803

Los voltajes de contacto V_c mayores ocurren para $\Phi > 0,5\pi$. A estas diferencias de potencial podría estar sometido una persona que se ubique en la superficie, y establezca contacto con una estructura metálica conectada a la malla. Un ejemplo permite aclarar mejor la situación, si la elevación del potencial de tierra para una falla a tierra fuera de $EPT=1000$ V, entonces una persona en la superficie colocada en el punto $-0,4$ m de la malla, podría estar sometida a un diferencial de potencial 410,8 V para un terreno plano, a 547,1 V para $\Phi=0,6\pi$, y a 244,9 V para $\Phi=0,4\pi$. La conclusión inmediata es la diferencia en la distribución del voltaje en la superficie del terreno entre terrenos homogéneos planos y aquellos con taludes que se puedan representar mediante cuñas. Para ángulos de la cuña $\Phi > 0,5\pi$, y cercanos al sistema de conexión a tierra de una instalación eléctrica, asumir una distribución superficial de voltaje igual a la de un terreno plano puede conllevar a diseños con situaciones de riesgo no previstas en terrenos homogéneos planos.

APÉNDICE A: ECUACIONES DE MAXWELL

A.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan los fenómenos electromagnéticos son las relaciones conocidas con Ecuaciones de Maxwell, que junto a las denominadas relaciones constitutivas, permiten formular modelos matemáticos para el estudio de estos fenómenos.

Las relaciones básicas son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Donde:

E: Campo Eléctrico (V/m)

H: Campo Magnético(A/m)

B: Densidad de Flujo Magnético (A/m)

D: Densidad de Flujo Eléctrico (C/m²)

J: Densidad de Corriente Eléctrica de Conducción (A/m²)

A partir de (A.1) y (A.2) se pueden obtener la siguientes relaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

q : Densidad de Carga Eléctrica (C/m³)

Las relaciones constitutivas del medio son las siguientes:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{A.6})$$

Los valores ϵ (F/m) y μ (H/m) se relacionan con las características eléctricas y magnéticas del medio. En general son funciones del espacio y del tiempo. Para medios isotrópicos homogéneos se asumen como valores constantes.

Adicionalmente para medios con corrientes de conducción se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.8})$$

La relación (A.7) se conoce como ley de Ohm en forma puntual, y la relación (A.8) como la ecuación de continuidad. Las relaciones (A.1)-(A.4) se conocen como las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Mediante los teoremas de Stokes y Ostrogradsky se obtiene la versión integral de las ecuaciones de Maxwell. En la tabla A.1 se resumen las dos formas de estas ecuaciones:

Tabla A.1 Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral

Forma Diferencial	Forma Integral
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \cdot dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$

A.2 Campos invariables en el tiempo

En el caso que no existan variaciones en el tiempo las ecuaciones de Maxwell se simplifican notablemente, y los campos eléctricos y magnéticos pueden calcularse por separado. Aún cuando existan corrientes de conducción, si éstas son constantes en el tiempo, se puede hacer el cálculo por separado de los campos eléctricos y magnéticos. Como consecuencia de la invariación en el tiempo se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.12})$$

El campo eléctrico puede obtenerse a partir de una función escalar V . En efecto si:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (\text{A.13})$$

La expresión (A.13) automáticamente satisface (A.9), ya que el rotacional de un gradiente es idénticamente nulo. Así el problema se reduce a la determinación de una función potencial V , que

satisfaga ciertas condiciones de contorno impuestas por el problema específico a resolver. Si se sustituye el campo eléctrico \mathbf{E} de acuerdo a (A.13) en (A.11), sabiendo que $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ se obtiene:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{A.14})$$

Que se conoce como la ecuación de Poisson. Si no existen cargas, $\rho=0$, se obtiene la ecuación de Laplace.

En forma análoga al potencial escalar V se puede definir un potencial magnético vectorial \mathbf{A} tal que:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.15})$$

La expresión (A.15) satisface la relación (A.12), sustituyendo \mathbf{H} según (A.15) en (A.10) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (\text{A.16})$$

En coordenadas cartesianas la ecuación vectorial (A.16) se reduce a tres ecuaciones escalares de cada una de los componentes del vector \mathbf{A} . Para otro sistema de coordenadas no es posible tal simplificación.

A.3 La ecuación de Helmholtz

Para cantidades que varían en el tiempo como una función exponencial de la forma $U \cdot \exp(j\omega t)$, la derivada respecto al tiempo es simplemente $j\omega U \cdot \exp(j\omega t)$, es decir la función original multiplicada por $j\omega$. Es como si el operador de la derivada respecto al tiempo se sustituyera por $j\omega$. Para ésta variación respecto al tiempo las ecuaciones de Maxwell (A.1) a (A.4) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + j\omega \mu \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{A.18})$$

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.20})$$

La solución para el campo eléctrico se puede postular de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega \mathbf{A} \quad (\text{A.21})$$

La función V es un potencial escalar. \mathbf{A} es el vector potencial magnético tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sin embargo el vector \mathbf{A} no queda definido solamente por su rotacional, se requiere definir su divergencia y un valor en un punto de la región o dominio de interés. Para un medio conductor

con conductividad σ se puede imponer la siguiente condición entre el vector potencial magnético \mathbf{A} y el potencial escalar V [60]:

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{\gamma^2}{j\omega} V = 0 \quad (\text{A.22})$$

Donde:

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \quad (\text{A.23})$$

Tomando la divergencia del campo eléctrico en (A.21) y con la relación (A.22) en un medio sin cargas, $q = 0$, se obtiene la ecuación de Helmholtz para el potencial escalar V :

$$\nabla^2 V = \gamma^2 V \quad (\text{A.24})$$

A.4 Condiciones de Contorno

Para dos medios con diferentes características: $\sigma_1, \varepsilon_1, \mu_1, \sigma_2, \varepsilon_2, \mu_2$ se deben cumplir ciertas relaciones entre los campos magnéticos y eléctricos. Considérese la figura A.1 con vectores \mathbf{a}_n y \mathbf{a}_t normal y tangente a la superficie que separa los medios.

Las componentes tangenciales y normales en términos de los vectores locales \mathbf{a}_n y \mathbf{a}_t están determinadas por los productos escalares respectivos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ti} &= \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{E}_i ; \mathbf{E}_{ni} = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{E}_i \\ \mathbf{H}_{ti} &= \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{H}_i ; \mathbf{H}_{ni} = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{H}_i \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{J}_{ti} &= \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{J}_i ; \mathbf{J}_{ni} = \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{J}_i \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{E}_{t1} - \mathbf{E}_{t2} = 0 ; \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{J}_s \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{D}_{n1} - \mathbf{D}_{n2} = q_s ; \mathbf{B}_{n1} - \mathbf{B}_{n2} = 0 \quad (\text{A.27})$$

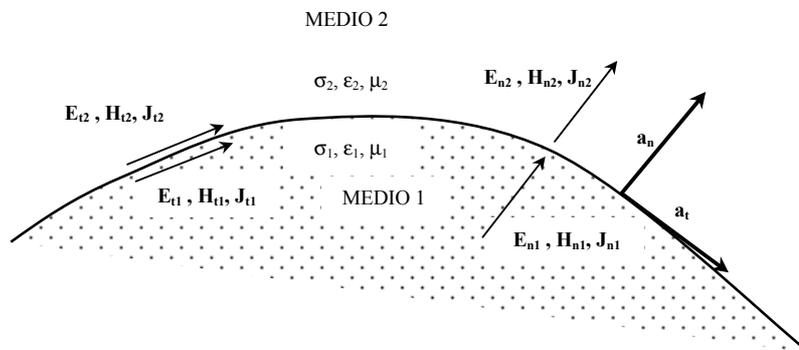


Fig. A.1 Condiciones de Contorno entre dos medios

En (A.26) \mathbf{J}_s es un vector densidad de corriente superficial. En (A.27) q_s es una densidad de carga superficial. Tanto \mathbf{J}_s como q_s representan las fuentes de corriente y carga que pudieran existir sobre la superficie de separación de los medios. Dependiendo de la naturaleza de los medios: conductor o dieléctrico las relaciones (A.26), (A.27) asumen formas particulares, en la tabla A.2 se resumen estos resultados particulares.

Tabla A.2 Condiciones de Contorno entre varios medios

Componente	Relación de Contorno	Condición
\mathbf{E}_t	$\mathbf{E}_{t1}=\mathbf{E}_{t2}$	Dos medios cualquiera
\mathbf{H}_t	$\mathbf{H}_{t1}-\mathbf{H}_{t2}=\mathbf{J}_s$	Medios con densidad de corriente en la frontera
\mathbf{D}_n	$\mathbf{D}_{n1}=\mathbf{D}_{n2}$	Medios dieléctricos perfectos sin carga en la frontera
\mathbf{D}_n	$\mathbf{D}_{n1}-\mathbf{D}_{n2}=q_s$	Medios dieléctricos perfectos con carga en la frontera
\mathbf{B}_n	$\mathbf{B}_{n1}=\mathbf{B}_{n2}$	Dos medios cualquiera
\mathbf{D}_n	$\mathbf{D}_{n1}=q_s$	Medio 1 dieléctrico perfecto, Medio2 conductor perfecto
\mathbf{J}_n	$\mathbf{J}_{n1}=\mathbf{J}_{n2}$	Medios Conductores
\mathbf{J}_t	$\sigma_1 \cdot \mathbf{J}_{t1} = \sigma_2 \cdot \mathbf{J}_{t2}$	Medios Conductores
\mathbf{E}_t	$\mathbf{E}_{t1} = 0$	Medio 2 conductor perfecto
\mathbf{H}_t	$\mathbf{H}_{t1}=\mathbf{J}_s$	Medio 2 conductor perfecto con corriente superficial
\mathbf{H}_t	$\mathbf{H}_{t1}=0$	Medio 2 con permeabilidad infinita

A.5 Identidades de Green

Las identidades de Green se pueden obtener a partir del teorema de la divergencia. Para un campo vectorial \mathbf{A} se cumple:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.28})$$

En la expresión (A.28) $d\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot ds$ es un vector diferencial de superficie con dirección perpendicular a la superficie cerrada s alrededor de la cual se está evaluando la integral de superficie en el lado izquierdo de (A.28). Se asume que la superficie s es una superficie suave. La integral de volumen se evalúa en todo el volumen v encerrado por s .

Sean dos funciones escalares Φ, Ψ la operación gradiente sobre cada una de ellas da como resultado funciones vectoriales que cumplen la siguiente relación:

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) = \Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \quad (\text{A.29})$$

La derivada en la dirección normal a la superficie s de cualquiera de las dos funciones Ψ, Φ se puede definir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.30})$$

Donde \mathbf{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie s . Mediante el teorema de la divergencia se puede establecer la siguiente relación a partir de (A.29):

$$\int_v (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) dv = \oint_s \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds \quad (\text{A.31})$$

Esta relación se conoce como la *Primera Identidad de Green*. En (A.31) se pueden intercambiar las funciones Φ, Ψ en las operaciones indicadas obteniéndose:

$$\int_v (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) dv = \oint_s \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (\text{A.32})$$

Restando (A.31) menos (A.32) se obtiene la *Segunda Identidad de Green*:

$$\int_v (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dv = \oint_s \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - \oint_s \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (\text{A.33})$$

Obviamente se asume que las funciones Φ, Ψ son continuas y poseen segundas derivadas en el volumen v .

A.6 La función δ

La función δ no es una función en el sentido matemático usual, es un operador que tiene las siguientes propiedades:

$$\delta(x - a) = 0 \quad x \neq a \quad (\text{A.34})$$

Para $x=a$ $\delta(x-a)$ no está definida

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - x) dx = 1 \quad (\text{A.35})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) F(x) dx = F(a) \quad (\text{A.36})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - a) F(x) dx = F'(a) \quad (\text{A.37})$$

Para mas de una dimensión se debe tomar el producto de las funciones delta en cada dimensión dividido por el Jacobiano del sistema de coordenadas utilizado. En la Tabla A.3 se resumen los casos mas comunes.

Tabla A.3 La función δ en diferentes

Coordenadas	1D	2D	3D
Cartesianas	$\delta(x)$	$\delta(x)\delta(y)$	$\delta(x)\delta(y)\delta(z)$
Polares		$\delta(r)\delta(\varphi)/r$	
Cilíndricas			$\delta(r)\delta(\varphi)\delta(z)/r$
Esféricas			$\delta(R)\delta(\varphi)\delta(z)/R^2$

A.7 Funciones de Green

La teoría general de ecuaciones lineales permite postular la existencia de un operador inverso para resolver la ecuación:

$$Lu = f \quad (\text{A.38})$$

Si existe un operador inverso L^{-1} tal que $L^{-1}L=I$, donde I representa el operador identidad, entonces:

$$L^{-1}Lu = Iu = u \quad (\text{A.39})$$

Si L es un operador diferencial, el operador inverso L^{-1} será un operador integral. Sea L^{-1} un operador integral con un núcleo $g(x,t)$ tal que:

$$L^{-1}u(x) = \int g(x,t)u(t)dt \quad (\text{A.40})$$

De acuerdo a lo expuesto se pueden hacer las siguientes operaciones:

$$u(x) = LL^{-1}u(x) = L \int g(x,t)u(t)dt = \int Lg(x,t)u(t)dt \quad (\text{A.41})$$

En (A.41) el operador diferencial L actúa sobre la variable x , lo que permite el intercambio con el operador integral. Si $Lg(x,t) = \delta(x-t)$, entonces (A.41) se satisface en el marco de la aplicación de la función δ , o en forma mas amplia dentro de la teoría de las Funciones Generalizadas[25]. Entonces el núcleo $g(x,t)$ será la función que satisface la ecuación:

$$Lg = \delta(x-t) \quad (\text{A.42})$$

Este núcleo $g(x,t)$ que satisface la ecuación (A.42) es lo que se conoce como *la función de Green del operador diferencial L* . La forma específica de $g(x,t)$ para cada problema en particular depende de las condiciones de contorno. Aun para un mismo operador diferencial L la función $g(x,t)$ puede ser totalmente diferente para dos condiciones de contorno dadas. La determinación de la función de Green no es en general un proceso directo, incluso puede llegar a ser un problema tan difícil de resolver como el problema original[45].

APENDICE B: IMÁGENES A PARTIR DE LA SOLUCIÓN INTEGRAL

B.1 Polos de la solución integral (2.9)

Sustituyendo la función $H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi)$ en (2.9), en tres dimensiones se obtiene:

$$V(r, \varphi, r_o, \varphi_o) = \frac{c}{2\pi j} \frac{\pi}{4\Phi} \int_{\gamma} \frac{\{Ctg(\zeta_1) \pm Ctg(\zeta_2)\}}{\sqrt{r^2 + r_o^2 - 2r.r_o \cos(\alpha) + (z - z_o)^2}} d\alpha \quad (B.1)$$

$$\text{Donde: } \zeta_1 = \frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \varphi - \varphi_o) ; \zeta_2 = \frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \varphi + \varphi_o - 2\Phi)$$

Los polos de (B.1) se obtienen cuando ζ_1 ó ζ_2 son iguales a $m\pi$, ó cuando el denominador se anula. En el primer caso basta hacer las siguientes igualdades:

$$\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \varphi - \varphi_o) = m\pi \quad (B.2)$$

$$\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \varphi + \varphi_o - 2\Phi) = n\pi \quad (B.3)$$

A partir de (B.2) y (B.3) se pueden despejar directamente los valores de α indicados en (2.17) y (2.18):

$$\alpha = 4m\Phi + \varphi - \varphi_o ; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (B.4)$$

$$\alpha = 2(2n + 1)\Phi - \varphi - \varphi_o ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (B.5)$$

Las raíces del denominador se obtienen resolviendo la siguiente ecuación:

$$r^2 + r_o^2 - 2r.r_o \cos(\alpha) + (z - z_o)^2 = 0 \quad (B.6)$$

La cual se anula para los valores de $\alpha = \zeta + jy$ iguales a:

$$\cos(\alpha) = \frac{r^2 + r_o^2 + (z - z_o)^2}{2r.r_o} \quad (B.7)$$

Separando la función $\cos(\alpha) = \cos(\zeta + jy)$ en su parte real e imaginaria, a partir de (B.7) se obtienen los resultados (2.15) y 2.16):

$$\alpha = 2N\pi + jy \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.8})$$

$$Ch(y) = \frac{(r^2 + r_o^2)}{2.r.r_o} \quad (\text{B.9})$$

Para dos dimensiones basta eliminar el término $(z-z_o)^2$ en (B.7).

B.2 Deducción de la expresión (2.19)

La expresión (2.19) para las condiciones de Dirichlet o condiciones de contorno de primer género: $V=0$ para $\varphi=\pm\Phi$, se obtiene manipulando algebraicamente la función $H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) = Ctg(\zeta_1) - Ctg(\zeta_2)$ la cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) = \frac{\pi}{4\Phi} \frac{\{Cos(\zeta_1).Sen(\zeta_2) - Cos(\zeta_2).Sen(\zeta_1)\}}{Sen(\zeta_1).Sen(\zeta_2)} \quad (\text{B.10})$$

Mediante la utilización de las formulas de las funciones exponenciales (B.10) se transforma en:

$$H(\alpha, \varphi, \varphi_o, \Phi) = \frac{2j\pi}{4\Phi} \frac{e^{-j(\zeta_1-\zeta_2)} - e^{j(\zeta_1-\zeta_2)}}{e^{j(\zeta_1+\zeta_2)} + e^{j(\zeta_1+\zeta_2)} - e^{j(\zeta_1-\zeta_2)} - e^{-j(\zeta_1-\zeta_2)}} \quad (\text{B.11})$$

Donde:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \frac{\pi}{2\Phi} (\varphi_o - \Phi) ; \zeta_1 + \zeta_2 = \frac{\pi}{2\Phi} (\alpha + \varphi - \Phi) \quad (\text{B.12})$$

Mediante el cambio de variable $u=\exp(j\alpha)$ se puede escribir $Cos(\alpha)=(u+u^{-1})/2$ y $d\alpha=du/(ju)$, reemplazando en (B.1) se obtiene:

$$V(r, \varphi, r_o, \varphi_o) = \frac{c}{4j\Phi} \int_{\gamma} \frac{(u_o^{-1} - u_o)}{\left(u^k u_{\varphi} + \frac{1}{u^k u_{\varphi}} - u_o - u_o^{-1} \right) \left(\sqrt{r^2 + r_o^2 - r.r_o(u + u^{-1}) + (z - z_o)^2} \right) (u)} du \quad (\text{B.13})$$

donde:

$$u_o = e^{jk(\Phi - \varphi_o)} \quad (\text{B.14})$$

$$u_{\varphi} = e^{jk(\varphi - \Phi)} \quad (\text{B.15})$$

$$k = \frac{\pi}{2\Phi} \quad (\text{B.16})$$

En el denominador el término que incluye el elemento u^k se puede factorizar de la siguiente forma:

$$\left(u^k u_\phi + \frac{1}{u^k u_\phi} - u_o - u_o^{-1} \right) = \left(u^k - \frac{u_o}{u_\phi} \right) \left(u^k - \frac{1}{u_o u_\phi} \right) \quad (\text{B.17})$$

Haciendo las simplificaciones del caso se obtiene finalmente:

$$V = \frac{c}{4j\Phi} \left(\frac{u_o - u_o^{-1}}{u_\phi} \right) \int_L \frac{u^{k-1} K(R) du}{(u^k - u_o / u_\phi) \{ u^k - (u_o u_\phi)^{-1} \}} \quad (\text{B.18})$$

Donde:

$$R = \sqrt{r^2 + r_o^2 - r r_o (u + u^{-1}) + (z - z_o)^2} \quad (\text{B.19})$$

Para tres dimensiones $K(R)=1/R$, para dos dimensiones el factor $(z-z_o)^2$ se debe eliminar en (B.19) y $K(R)=\ln(R)$. La integración en (B.18) se puede efectuar mediante la aplicación directa de la teoría de residuos, previa determinación de las raíces del denominador. Por ejemplo para $2\Phi=\pi/2$, $k=2$, la figura B.1 ilustra el caso con las respectivas imágenes

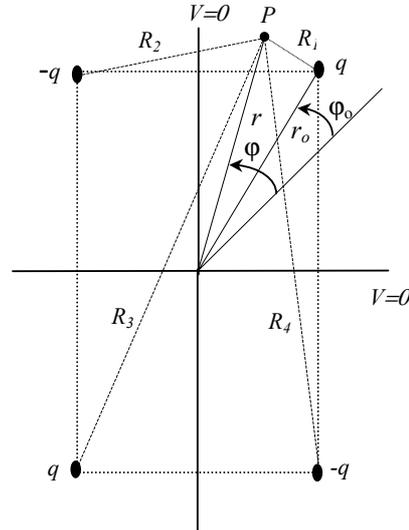


Fig. B.1 Fuente q en un dominio $\Phi=\pi/4$

Cada distancia R_i en la figura B.1 está dada por:

$$R_i = \sqrt{r^2 + r_o^2 - r \cdot r_o \cos(\varphi_i) + (z - z_o)^2} \quad (\text{B.20})$$

Los ángulos φ_i asociados a cada distancia R_i se muestran en la tabla B.1

Tabla B.1 Ángulos φ_i para $k=2$			
$\varphi_1 = \varphi - \varphi_o$	$\varphi_2 = \varphi + \varphi_o - 2\Phi$	$\varphi_3 = \varphi - \pi - \varphi_o$	$\varphi_4 = \varphi + \varphi_o - 2\Phi - \pi$

La solución obtenida para el potencial en el punto $P(r, \varphi)$ mediante el método de las imágenes esta dado por:

$$V(P) = c \{K(R_1) - K(R_2) + K(R_3) - K(R_4)\} \quad (\text{B.21})$$

Para dos dimensiones $c=q/(2\pi\epsilon)$, para tres dimensiones $c=q/(4\pi\epsilon)$.

Las raíces del denominador de (B.18), para $k=2$, son las siguientes:

Tabla B.2 Raíces para $k=2$			
$u_1 = e^{j(2\Phi - \varphi - \varphi_o)}$	$u_2 = e^{j(\pi + 2\Phi - \varphi - \varphi_o)}$	$u_3 = e^{j(\varphi_o - \varphi)}$	$u_4 = e^{j(\pi - \varphi + \varphi_o)}$

Mediante la teoría de residuos, para $\Phi = \pi/4$, se obtiene:

$$V(P) = 2c \left(\frac{u_o^{-1} - u_o}{u_\varphi} \right) \sum_{i=1}^4 \frac{u_i \cdot K(R)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (u_i - u_j)} \quad (\text{B.22})$$

De acuerdo a la tabla B.2 se puede establecer fácilmente que: $(u_1 - u_2) = 2u_1$, $(u_2 - u_1) = 2u_2$, $(u_3 - u_4) = 2u_3$, $(u_4 - u_3) = 2u_4$, y que $(u_1 - u_3)(u_1 - u_4) = (u_2 - u_3)(u_2 - u_4) = -(u_o^{-1} - u_o)/u_\varphi$; y $(u_3 - u_1)(u_3 - u_2) = (u_4 - u_1)(u_4 - u_2) = (u_o^{-1} - u_o)/u_\varphi$. Con éstas identidades y (B.22), (B.19) se obtiene mediante sustitución directa y algunas simplificaciones simples (B.21).

APENDICE C: MATRIZ $T=MW$ DE VECTORES PROPIOS APROXIMADOS

En [6] se describe un procedimiento para obtener en forma aproximada la matriz de vectores propios que diagonaliza la matriz ZY de una línea de transmisión no transpuesta, a partir de transformaciones conocidas. Se conoce ampliamente que las matrices Z , Y , y el producto ZY de una línea de transmisión totalmente transpuesta tienen la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} p & m & m \\ m & p & m \\ m & m & p \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

Los valores propios de matrices con la estructura (C.1) son: $\lambda_{o1}=p+2m$ y $\lambda_{o2}=\lambda_{o3}=p-m$, es decir uno de los valores propios se repite. Esto se traduce en que los vectores propios asociados al valor propio repetido, se encuentran en un mismo plano y existe un grado de libertad para su escogencia. Tradicionalmente se ha escogido la matriz de valores propios de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

Donde $a = \exp(j2\pi/3)$. (C.2) está asociada a Fortescue y se le conoce con el nombre de matriz de componentes simétricos. Existen otras transformaciones menos conocidas como la de Clarke y Karrenbauer:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Si designamos en forma genérica por $\mathbf{M}_o = \{\mathbf{m}_{o1} \ \mathbf{m}_{o2} \ \mathbf{m}_{o3}\}$ cualquiera de las matrices \mathbf{A}_F , \mathbf{C} o \mathbf{K} , el objetivo es obtener una matriz $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3\}$, cuyos vectores columnas \mathbf{t}_i se puedan expresar como una combinación lineal de los vectores \mathbf{m}_{oi} , y que \mathbf{T} diagonalice la matriz ZY . Sea \mathbf{T}^* la matriz que exactamente diagonaliza ZY , \mathbf{T} representa entonces la proyección de la matriz \mathbf{T}^* sobre el espacio vectorial \mathbf{A}_F , \mathbf{C} o \mathbf{K} . Gracias al grado de libertad que genera el valor propio que se repite de la estructura matricial (C.1), es posible encontrar una transformación $\mathbf{M} = \mathbf{M}_o \mathbf{N}$ que minimiza el error de la proyección mencionada. La matriz \mathbf{N} que se propone en [6] tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & n_{23} \\ 0 & n_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Con la matriz \mathbf{N} propuesta se obtienen un nuevo espacio vectorial modificado con los siguientes vectores propios:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_{o1} ; \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_{o2} + n_{32}\mathbf{m}_{o3} ; \mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_{o3} + n_{23}\mathbf{m}_{o2}$$

La matriz \mathbf{T} se puede expresar como la suma de la matriz modificada \mathbf{M} mas un elemento de perturbación \mathbf{MQ} , con la matriz \mathbf{Q} a determinar, es decir : $\mathbf{T}=\mathbf{M}+\mathbf{MQ}$. En términos de la matriz original \mathbf{M}_o se tiene: $\mathbf{T}=\mathbf{M}_o\mathbf{N}(\mathbf{1}+\mathbf{Q})=\mathbf{M}_o\mathbf{W}$, donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad y $\mathbf{W}=\mathbf{N}(\mathbf{1}+\mathbf{Q})$.

El procedimiento para determinar \mathbf{W} es el siguiente[6]:

Paso 1:

Determine el producto \mathbf{ZY} de la matriz no transpuesta.

Paso 2:

Obtenga el promedio p de los elementos de la diagonal principal, y el promedio m de los elementos fuera de la diagonal principal de \mathbf{ZY} , para obtener un estructura tipo (C.1). Determine $\lambda_{o1}=p+2m$ y $\lambda_{o2}=\lambda_{o3}=p-m$.

Paso 3:

Evalúe el producto $\mathbf{F}=\mathbf{A}_F^{-1}\mathbf{ZY}\mathbf{A}_F$, que es el intento de diagonalizar \mathbf{ZY} mediante \mathbf{A}_F .

Paso 4:

Determine n_{23} y n_{32} a partir de los elementos f_{ij} de \mathbf{F} :

$$n_{23} = \frac{a_{33} - f_{33}}{f_{32}} ; n_{32} = \frac{a_{22} - f_{22}}{f_{23}} \quad (\text{C.6})$$

donde a_{33} y a_{22} son los valores propios de la submatriz \mathbf{F}_{22} :

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Paso 5:

Conocida la matriz \mathbf{N} , determine el producto $\mathbf{P}=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{FN}$. La diagonal principal de este producto son los valores propios aproximados de la matriz \mathbf{ZY} .

Paso 6:

Con los elemento p_{ij} del producto \mathbf{P} y con los valores propios $\lambda_{o1}, \lambda_{o2}$ se determinan los elementos q_{ij} de la matriz \mathbf{Q} .

$$q_{ji} = \frac{P_{ji}}{\lambda_{oi} - \lambda_{oj}} \quad i \neq j \quad (\text{C.8})$$

Con los elementos $q_{ii}=0$.

Paso 7:

Conocidas \mathbf{N} y \mathbf{Q} , $\mathbf{W}=\mathbf{N}(\mathbf{1}+\mathbf{Q})$

APÉNDICE D: TERRENO DE TRES ESTRATOS

D.1 Fuente en el segundo estrato

En la figura D.1 se muestra un terreno de tres estratos con una fuente puntual de corriente ubicada en el segundo estrato.

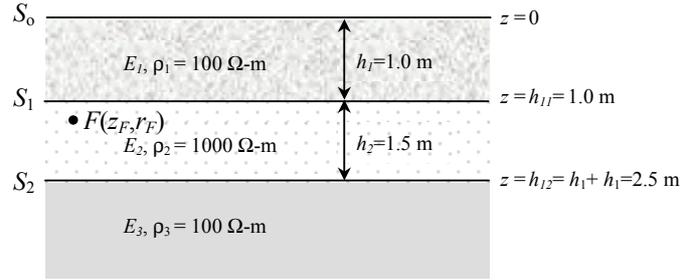


FIG. D.1 Terreno de tres estratos

A continuación se ilustrará el procedimiento completo para obtener las funciones de los potenciales originados por la fuente puntual de corriente en cada estrato: V_{12} , V_{22} , V_{32} el primer subíndice indica el estrato donde se determina el potencial, y el segundo subíndice el estrato donde está ubicada la fuente. La solución del potencial para cada estrato se postula de la siguiente forma:

$$V_{12} = \frac{\rho_2 I_2}{4\pi} \int_0^\infty \left(\phi_{12} e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{12} e^{\lambda(z-z_F)} \right) \quad (\text{D.1})$$

$$V_{22} = \frac{\rho_2 I_2}{4\pi} \int_0^\infty \left(\phi_{22} e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{22} e^{\lambda(z-z_F)} \right) ; \quad P \neq F(z_F, r_F) \quad (\text{D.2})$$

$$V_{32} = \frac{\rho_2 I_2}{4\pi} \int_0^\infty \left(\phi_{32} e^{-\lambda(z-z_F)} + \psi_{32} e^{\lambda(z-z_F)} \right) \quad (\text{D.3})$$

En las expresiones (D.1) a (D.3) las funciones ϕ_{i2} , ψ_{i2} indicadas ($i=1,2,3$); permiten los grados de libertad suficientes para satisfacer las condiciones de contorno (3.2) a (3.5). Así se obtienen las siguientes relaciones:

En la superficie del terreno, $z=0$, debe cumplirse $\partial V_{12}/\partial z=0$:

$$-\phi_{12}e^{\lambda z_F} + \psi_{12}e^{-\lambda z_F} = 0 \quad (\text{D.4})$$

En la superficie S_1 entre los estratos E_1 y E_2 para $z=h_{11}$ se debe cumplir: $V_{12}=V_{22}$ y $\rho_2\partial V_{12}/\partial z=\rho_1\partial V_{22}/\partial z$, lo que conduce a:

$$\phi_{12}e^{-\lambda(h_{11}-z_F)} + \psi_{12}e^{\lambda(h_{11}-z_F)} = e^{-\lambda|h_{11}-z_F|} + \phi_{22}e^{-\lambda(h_{11}-z_F)} + \psi_{22}e^{\lambda(h_{11}-z_F)} \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left\{ -\phi_{12}e^{-\lambda(h_{11}-z_F)} + \psi_{12}e^{\lambda(h_{11}-z_F)} \right\} = e^{-\lambda|h_{11}-z_F|} - \phi_{22}e^{-\lambda(h_{11}-z_F)} + \psi_{22}e^{\lambda(h_{11}-z_F)} \quad (\text{D.6})$$

En (D.6) debe considerarse que $\partial(e^{-|z-z_F|})/\partial z > 0$ si $(z-z_F) < 0$ y viceversa.

En el tercer estrato ψ_{23} debe ser nula, para poder cumplir con la condición que $V_{23} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. En la superficie S_2 entre los estratos E_2 y E_3 para $z=h_{12}$ se debe cumplir: $V_{22}=V_{32}$ y $\rho_3\partial V_{22}/\partial z=\rho_2\partial V_{32}/\partial z$, lo que conduce a:

$$e^{-\lambda|h_{12}-z_F|} + \phi_{22}e^{-\lambda(h_{12}-z_F)} + \psi_{22}e^{\lambda(h_{12}-z_F)} = \phi_{32}e^{-\lambda(h_{12}-z_F)} \quad (\text{D.7})$$

$$-e^{-\lambda|h_{12}-z_F|} - \phi_{22}e^{-\lambda(h_{12}-z_F)} + \psi_{22}e^{\lambda(h_{12}-z_F)} = -\frac{\rho_2}{\rho_3}\phi_{32}e^{-\lambda(h_{12}-z_F)} \quad (\text{D.8})$$

Las igualdades (D.4) a (D.8) conducen a un sistema lineal de cinco ecuaciones teniendo como incógnitas las cinco funciones ϕ_{12} , ψ_{12} , ϕ_{22} , ψ_{22} , ϕ_{32} . A partir de (D.4) a (D.8) se consiguen las siguientes relaciones:

$$\psi_{12} = \phi_{12}e^{2\lambda z_F} \quad (\text{D.9})$$

$$\phi_{22} = \left\{ \frac{1 - K_1 e^{2\lambda h_{11}}}{1 - K_1} \right\} \phi_{12} \quad (\text{D.10})$$

$$\psi_{22}e^{2\lambda(h_{12}-z_F)} = (1 + K_2)\phi_{22} \quad (\text{D.11})$$

$$\phi_{32} = (1 + K_2)(1 + \phi_{22}) \quad (\text{D.12})$$

La función ϕ_{12} está dada por:

$$\phi_{12} = \frac{(1 - K_1)(e^{-2\lambda z_F} + K_2 e^{-2\lambda h_{12}})}{1 - K_1 e^{-2\lambda h_{11}} - K_2 e^{-2\lambda h_{12}} + K_1 K_2 e^{-2\lambda(h_{12} - h_{11})}} \quad (\text{D.13})$$

Donde: $K_m = (\rho_{m+1} - \rho_m)/(\rho_{m+1} + \rho_m)$

La sustitución directa de (D.13) en las relaciones (D.9) a (D.12) permite obtener las funciones restantes.

Este caso sirve para ilustrar la aplicación de las relaciones de recurrencia desarrolladas. Mediante (3.19) se obtiene ϕ_{12} :

$$\phi_{12} = \frac{(\alpha_{32} e^{-2\lambda z_F} + \beta_{32} e^{-2\lambda h_{12}})}{v_3} (1 - K_1) \quad (\text{D.14})$$

Con la tabla 3.1 y mediante (3.31), (3.32) y (3.33) se obtiene:

$$v_3 = \sum_{i=1}^{2^2} M_i e^{2\lambda m_i} = 1,0 - K_1 e^{2\lambda h_{11}} - K_2 e^{2\lambda h_{12}} + K_1 K_2 e^{2\lambda(h_{12} - h_{11})} \quad (\text{D.15})$$

Como se expuso en la página 39, párrafo precedente a (3.28), $\alpha_{32}=1,0$ y $\beta_{32}=K_2$. Sustituyendo directamente en (D.14) se obtiene (D.13).

Referencias

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover, U.S.A, 1972.
- [2] Babuska I., Rosenzweig M.: “A finite element scheme for domains with corners”, *Numerical Mathematics*, vol. 20, pp.1-21, 1972.
- [3] C.H.T. Baker: “*The numerical treatment of integral equations*”, Clarendon Press, 1978, Gran Bretaña.
- [4] J. A. Brandao, J. H. Briceño: “Minimization of three phase line unbalances by proper positioning of earth wires”, 8th Mediterranean Electrotechnical Conference, melec96, May 13-16, Bari, Italy, 1996
- [5] J.A. Brandao, J. H. Briceño: “Modal analysis of untransposed bilateral three-phase lines- a perturbation approach”, *Trans. Power Delivery*, vol. 12, No. 1, January 1997.
- [6] J.A. Brandao, J. H. Briceño: “On the modal analysis of asymmetrical three-phase lines using standard transformation matrices”, paper No. GS97-362B, IEEE Power Engineering Society.
- [7] C. Balanis: *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley, U.S.A, 1989.
- [8] C.A. Brebbia, J. Dominguez: “*Boundary elements an introductory course*”, McGraw Hill, U.S.A, 1989.
- [9] J. H. Briceño: *Teoría de las líneas de transmisión aéreas*, Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, Mérida, Venezuela, 1992
- [10] CH. M. Butler: “Capacitance of a finite-length conducting cylindrical tube”, *J. Appl. Phys.* 51 (11), November 1980.
- [11] Y.L.Chow, J.J. Yang, G.E. Howard : “Complex Images for Electrostatic Field Computation in Multilayered Media”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.39, No. 7, July 1991.
- [12] Y.L. Chow, J.J. Yang, K.D. Srivastava: “Complex images of a ground electrode in layered soils”, *J. Appl. Phys.*, 71(2), 15 January 1992.
- [13] Y.L. Chow, J.J. Yang, K.D. Srisvastava: “Grounding resistance of buried electrodes in multi-layer earth predicted by simple voltage measurements along earth surface- a theoretical discussion”, *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 10, No. 2, April 1995.
- [14] I. Colominas J. Gomez-Calviño, F. Navarrina, M. Casteleiro: “Computer análisis of earthing systems in horizontally or vertically layered soils”, *Electric Power Systems Research*, vol. 59, No. 3, pp149-156, October 2001.
- [15] M. Costabel, M. Dauge: “Stable asymptotics for elliptic system on plane domains with corners”, *Commun. In Partial Differential Equations*, 19,(9&10), pp.1677-1726, 1994.
- [16] M. Costabel, M. Dauge: “Construction of corner singularities for Agmon-Douglis-Nirenberg elliptic systems”, *Math. Nachr.* 162, pp. 209-237, 1993.
- [17] M. Costabel, M. Dauge: “Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains”, <http://www.maths.univ-rennes1.fr/~costabel/>
- [18] M. Dauge: “*Elliptic boundary problems in corner domains - smoothness and asymptotics of solutions*”, *Lectures Notes in Mathematics*, vol. 1341, Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [19] B. Davies: “*Integral Transform and Their Applications*”, Springer-Verlag, 2da.Ed., 1985.
- [20] F. Dawalibi, D. Mukhedkar: “Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure, Part I : Analytical Study”, *IEEE Trans.* Vol. PAS-94, No. 2, March/April, 1975

- [21] F. Dawalibi, N. Barbeito: "Measurements and computation of the performance of grounding systems buried in multiplayer soils", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 6, No. 4, October 1991
- [22] E. Durand: *Electrostatique I*, Mason, 1964.
- [23] H.B. Dwight, : " Calculation of resistance to ground", Electrical Engineering, vol. 55, pp 1319-1328, December 1936.
- [24] T.R. Ferguson, R.H Duncan: "Charged cylindrical tube", J. Appl. Phys. 32 (7), July 1961.
- [25] B. Friedman: "*Principles and Techniques of Applied Mathematics*", John Wiley,1956.
- [26] B.A. Fuchs, B.V. Shabat: "*Functions of a Complex Variable and some of their applications*", vol. I, Addison-Wesley, 1964.
- [27] G. Green: "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", en "*Mathematical Papers of George Green*", Ed. N.M. Ferrers, Chelsea, N.Y., 1970.
- [28] N.M. Gunter: *Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics*, Frederick Ungar Publishing , 1967, New York.
- [29] R.W. Hamming: *Numerical Method for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, 1962.
- [30] R.F. Harrington: *Field computation by moment methods*, McMillan, 1968, New York.
- [31] R.J. Heppe : "Computation of Potential at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non Uniform Current Distribution", IEEE Trans. On Power App. and Systems, vol. PAS-98, No. 6, Nov./Dec. 1979.
- [32] Hyung-Soo Lee, Jung-Hoon Kim, F. Dawalibi: "Efficient ground design in layered soils", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 13, No. 3, july 1998
- [33] IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding ANSI/IEEE std. 80-1986, New York, IEEE/Wiley, 1986.
- [34] IEEE: " Practical Applications of ANSI/IEEE Standard 80-1986, IEEE Guide for Safety", IEEE Tutorial Course Text 86 EH0253-5 PWR.
- [35] D.B. Ingham, J. A. Ritchie, C.M. Taylor: "The linear boundary element solution of Laplace's equation with Dirichlet boundary conditions",Math. Comput. Modelling, vol. 15, No. 3-5, pp 195-204,1991.
- [36] J. Jackson, *Classical Electrodynamics* , John Wiley, 1962.
- [37] J. Jeans: *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5ta Ed.Cambridge, 1966.
- [38] O. Jefimenko, *Electricity and Magnetism* , Appleton- Century – Crofts, 1966.
- [39] L.V. Kantorovich, V.I. Krylov: *Approximated Methods of Higher Analysis*, Noordhoff, 1964.
- [40] V.A. Kondrat'ev: "Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points", Trans. Moscow Math. Sov., 16, pp. 227-313, 1967.
- [41] D. Kovarsky, L. J. Pinto, C.E. Caroli, N. Santos: "Soil surface potentials induced by Itaipu HVDC ground return current, Part I- Theoretical evaluation", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 3, No. 3, pp. 1204-1210, july 1988.
- [42] P.J. Lagacé, J.L. Houle, Y. Gervais, D. Mukhedkar: " Evaluation of the voltage distribution around toroidal HVDC ground electrodes in N-layer soils", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 3, No. 4, pp. 1573-1577, October 1988.
- [43] J.C. Maxwell: "*A Treatise on Electricity and Magnetism*", vol. 1, Dover, 1954.
- [44] M. Morita, N. Kumagai, J.R. Mautz: *Integral Equation Methods for Electromagnetics*, Artech House, 1990.

- [45] P.M. Morse, H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, Part I, McGraw-Hill, 1953.
- [46] J. Nahman, V. Djordjevic,: ” Resistance to ground of combined grid-multiple rods electrodes”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 11, No. 3 , pp.1337-1342, July 1996.
- [47] M. Panofsky, M. Phillips, “ *Classical Electricity and Magnetism*” , pp. 77-78, Addison-Wesley,1962.
- [48] F. Plachco: *Resolución de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en dominios arbitrarios*, Trabajo de Ascenso, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, 1983.
- [49] F. Plachco: *Transferencia Generalizada en Dominios Cuneiformes*, Trabajo de Ascenso, Facultad de Ingeniería , Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela , 1980.
- [50] D.K. Reitan, T.J. Higgins: “Calculation of the electrical capacitance of a cube”, J. Appl. Phys. 22 (2), February 1951.
- [51] H. Singer, H. Steinbigler, P. Weiss: “A charge simulation method of high voltages fields”, paper T 74 085-7, IEEE PES winter meeting, February 1974.
- [53] S.J. Schwarz : “ Analytical expressions for resistance of grounding systems”, AIEE Trans., vol. 73, part III-B, pp. 1011-1016, August, 1954.
- [54] V.I. Smirnov: *A course of higher mathematics*, vol. IV, Addison Wesley ,1964.
- [55] W.R. Smythe: “Charged right circular cylinder”, J. Appl. Phys. 33 (10), October 1962.
- [56] W.R. Smythe: *Static and Dynamic Electricity*, 2da. Ed., McGraw-Hill, 1950.
- [57] S.L. Sobolev: *Partial differential equations of mathematical physics*, Addison Wesley, 1964.
- [58] A. Sommerfeld: *Partial Differential Equations* , vol. IV, Academic Press, 1964.
- [59] J.A. Stratton: *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, 1941.
- [60] E.J. Sunde: *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*, Dover, 1968.
- [61] T.Takahashi, T. Kawase : “Calculation of Earth Resistance for a Deep-Driven rod in a Multi-Layer Earth Structure”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, No. 2, April 1991.
- [62] T. Takashima, T. Nakae, R. Ishibashi: “Calculation of complex fields in conducting media”, IEEE Trans. on Electrical Insulation, vol. EI-15. No. 1, February 1980.
- [63] A. Tuzhilin, “The theory of Malyuzhints’ inhomogeneous functional equations”, Differential Equations, vol. 9, No. 11, pp. 1580-1584, Nov. 1973
- [64] J.Van Bladel: *Singular Electromagnetic Fields and Sources*, IEEE Press,1995
- [65] P.K. Wang: “Calculation of electrostatic field surrounding a finite circular cylinder conductor”, IEEE Transaction on Antenna and Propagation”, vol. AP-32, No. 9, September 1984.
- [66] W. Wasow: “Asymptotic development of the solution of Dirichlet problem at analytical corners”, Duke Mathematic Journal, vol. 24, No. 1, pp. 47-57, march 1957.
- [67] G.N. Watson: *A Treatise of the Theory of Bessel Functions*, 2nd. Ed., Cambridge, 1966.
- [68] N. Wigley: “On a method to substract off singularity at a corner for the Diriclet or Neumann problem”, Mathematical of Computation, vol. 23, No. 106, pp. 345-401, 1968
- [69] P.P. Zabreyko, et al., : *Integral equations - a reference text*, Noordhorff, Leyden, 1975.